AM120 2010-2011: I Settimana

1. Derivabilitá e derivata

Sia $f : A \to \mathbf{R}$, $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset A$.

La f si dice derivabile in x_0 se esiste , finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tale limite, se esiste, finito od infinito si chiama derivata di f in x_0 e si scrive $f'(x_0)$, $\frac{df}{dx}(x_0)$, $(Df)(x_0)$.

Se A é aperto, f si dice derivabile in A se é derivabile in ogni punto di A: resta in tal caso definita in A una nuova funzione, la funzione derivata prima, f'. Se poi $f' \in C(A)$, ovvero f' é continua in A, si scrive $f \in C^1(A)$ e si dice che f é di classe C^1 in A.

Esempi

Se $f(x) = e^x$, é $f'(x) = e^x$. Infatti $\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \to_{h \to 0} e^x$.

Se $f(x) = \log x$, é $f'(x) = \frac{1}{x}$. Infatti $\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{h} \to_{h \to 0} \frac{1}{x}$.

Se $f(x) = c \, \forall x$, allora $f'(x) = 0$, $\forall x$.

Ricordiamo che una funzione $w : (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \to \mathbf{R}$ si dice infinitesima in x_0, e si scrive $w(x) = \circ(1)$ in x_0 se $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta_\epsilon : 0 < |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |w(x)| \leq \epsilon$, ovvero se w tende a zero al tendere di x a x_0.
Si dice anche che w é un infinitesimo rispetto ad h (o di ordine superiore al primo) in zero, e si scrive $w = \circ(h)$, se $\lim\limits_{h \to 0} \frac{w(h)}{h} = 0$, ovvero se $w(h) = h \circ (1)$.

2. Prop. Se f è derivabile in x_0, allora

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + h \circ (1) \qquad (\lim_{h \to 0} \circ(1) = 0)$$

In particolare f è continua in x_0. La funzione lineare di $\mathbf{R}$ in se,

$$df(x_0) : h \to f'(x_0)h$$

si chiama differenziale di f in x_0.
Notiamo che $df(x_0)$ é l'unica funzione lineare che approssima $f(x_0+h)-f(x_0)$ a meno di un infinitesimo di ordine superiore al primo. Infatti

$$f(x_0+h)-f(x_0)=ah+h\circ(1)\Rightarrow f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\tfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}[a+\circ(1)]=a$$

3. Derivate di somme, prodotti...

Se f,g sono derivabili in x_o, allora lo sono anche $f+g,\ fg,\frac{f}{g}$ se $g(x_o)\neq 0$ e

$$(f+g)'(x_o)=f'(x_o)+g'(x_o),\ (fg)'(x_o)=f'(x_o)g(x_o)+f(x_o)g'(x_0)$$

$$(\frac{f}{g})'(x_o)=\frac{f'(x_o)g(x_o)-f(x_o)g'(x_0)}{g^2(x_o)}$$

Esempio.

Se $f(x)=x^n,\ f'(x)=nx^{n-1}$.

4. Derivata di funzioni composte: la regola della catena

Se f é derivabile in x e g é derivabile in $f(x)$, allora $g\circ f$ é derivabile in x e $(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)$.

Prova. Per la derivabilitá di f,g, si ha

$$f(x+h)=f(x)+k, \qquad k:=f'(x)h+h\circ_1(1) \qquad \left(\lim_{h\to 0}\circ_1(1)=0\Leftrightarrow\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=f'(x)\right)$$

$$g(f(x+h))=g(f(x)+k)=g(f(x))+g'(f(x))k+k\circ_2(1) \qquad \left(\lim_{k\to 0}\circ_2(1)=0\right)$$

Quindi

$$\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=[g'(f(x))+\circ_2(1)]\frac{k}{h}\to g'(f(x))f'(x)$$

al tendere di h a zero, perché $h\to 0\Rightarrow k\to 0\Rightarrow\circ_2\to 0$.

Esempi.
$(f^n)'=nf^{n-1}f',\ (e^f)'=f'e^f,\ (\frac{1}{f})'=-\frac{f'}{f^2}$
$(f^g)'=(e^{g\log f})'=f^g(g\log f)'$

5. Derivabilitá e derivata della funzione inversa

Sia f iniettiva in $[a, b]$, $f^{-1} : f([a, b]) \to [a, b]$ la funzione inversa. Se f é continua, f^{-1} é continua, e se f é derivabile in x_o, con $f'(x_o) \neq 0$ allora f^{-1} é derivabile in $y_o = f(x_o)$ e

$$(f^{-1})'(f(x_o)) = \frac{1}{f'(x_o)}$$

Prova

Continuitá: sia $y_n \to y$, e sia $x_{n_k} := f^{-1}(y_{n_k})$ convergente, diciamo a x, e quindi $y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x)$. Da $y_n \to y$ segue che $f(x) = y$, ovvero $f^{-1}(y_n) \to f^{-1}(y)$.

Derivabilitá. É

$$h(k) := f^{-1}(f(x_o) + k) - x_o = f^{-1}(y_o + k) - f^{-1}(y_o) \to 0$$

quando k tende a zero. Quindi

$$f(x_o) + k = f(x_o + h(k)) = f(x_o) + f'(x_o)h(k) + h(k)\omega(h(k))$$

con $\omega(h) = \circ(1)$ in $h = 0$ e quindi $\omega(h(k)) = \circ(1)$ al tendere di k a zero. Dunque

$$k = f'(x_o)h(k) + \omega(h(k))h(k)$$

e quindi ($h(k) \neq 0!$),

$$\frac{k}{h(k)} = f'(x_o) + \omega(h(k)) \to_{k\to 0} f'(x_o)$$

da cui

$$\frac{h(k)}{k} \to_{k\to 0} \frac{1}{f'(x_o)}$$

perché $f'(x_o) \neq 0$.