AM120 Tracce delle lezioni

prof. G. Mancini

9.03.11

II Settimana

1. Alcune importanti funzioni inverse e le loro derivate

Se $f(x) = x^n, x > 0$, la sua inversa, $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}, x > 0$ ha per derivata $Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(f^{-1}(x)} = \frac{1}{n(f^{-1}(x))^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$.

Se $f(x) = \tan x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, la sua inversa, definita su tutto $\mathbf{R}$, si indica $f^{-1}(x) = \arctan x$, e si ha $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

In modo analogo si calcolano le derivate di $\arcsin x, \arccos x$, funzioni inverse di $\sin x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \cos x, x \in (0, \pi)$, e le derivate delle funzioni inverse delle funzioni iperboliche $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

2. Proprietà locali e globali delle funzioni derivabili

Qui, f é una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b).

Prop. Se $x_o \in (a, b)$ é punto di minimo (o di massimo), cioé

$$\exists \delta > 0 : \quad f(x_o) \le f(x) \quad \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$$

(ovvero $f(x_o) \ge f(x)\ \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta\ )$), allora $f'(x_o) = 0$.

Infatti, $f(x_o + h) - f(x_o) \ge 0$ se $|h| < \delta$, implica

$$f'(x_o) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} \le 0 \le \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h} = f'(x_o)$$

.

Teorema di Rolle Se $f(a) = f(b)$, allora esiste $x_o \in (a,b)$ tale che $f'(x_o) = 0$.

Infatti, per il teorema di Weierstrass, $\exists \underline{x}$, $\overline{x}$, in $[a,b]$ tali che $f(\underline{x}) \leq f(x) \leq f(\overline{x})$, $\forall x \in [a,b]$. Se $\underline{x}, \overline{x} \in \{a,b\}$, f é costante in $[a,b]$, e quindi a derivata nulla in $[a,b]$. Altrimenti, se, diciamo, $\underline{x} \in (a,b)$, é $f'(\underline{x}) = 0$.

Il teorema del valor medio, o di Lagrange. $\exists \xi \in (a,b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

Segue dal Teorema di Rolle applicato a

$$\phi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

Il teorema degli accrescimenti finiti, o di Cauchy.

Se g ha le stesse proprietá di f, e, in piú, $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a,b)$, allora

$$\exists \xi \in (a,b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Segue dal Teorema di Rolle applicato a

$$\phi(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)$$

3. Alcune conseguenze del teorema del valor medio.

Anche qui f é continua in $[a,b]$ e derivabile nei punti interni.

• $f'(x) = 0 \, \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f$ é costante in $[a,b]$.

• $f'(x) \geq 0 \, \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f$ é non decrescente in $[a,b]$.

• $f'(x) > 0 \, \forall x \in (a,b) \quad \Rightarrow \quad f$ é strettamente crescente in $[a,b]$. In particolare, é invertibile in $[a,b]$.

• fé localmente Lipschitziana in (a,b), cioé é Lip in ogni sottointervallo chiuso e limitato $[a',b']$ di (a,b):

$$\exists k > 0 : \; |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|, \; \forall x,y \in [a',b']$$

Segue da Lagrange, e quindi da Weierstrass applicato a f' in $[a', b']$. Infatti si puó prendere $k = \sup_{x \in [a', b']} |f'(x)|$.

• Se f é derivabile in (a, b) e continua in $[a, b)$, ed esiste inoltre $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, allora esiste $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ed ha lo stesso valore.

Sia $h_n > 0$, convergente a zero. Per il teorema del valor medio,

$$\exists t_n \in (0,1) : \frac{f(a+h_n) - f(a)}{h_n} = f'(a + t_n h_n)$$

da cui la tesi.

• Se f é derivabile in (a, b),f' ha, in (a, b) la proprietá del valore intermedio.

Se, ad esempio, f' ha segno diverso in $x_1, x_2, a < x_1 < x_2 < b$, diciamo $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$, f ha allora un minimo interno ad $[x_1, x_2]$, ove necessariamente la derivata di f si annulla.

4. Le regole di De L'Hospital

IRegola. Siano f, g derivabili in (a, b), infinitesime in a, $g(x)g'(x) \neq 0$ vicino ad a.

Se esiste, finito od infinito $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste anche $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ e i due limiti sono uguali.

Innanzi tutto, prolunghiamo con continuitá f, g fino ad a, ponendo $f(a) = g(a) = 0$. Sia quindi $x_n \in (a, b)$ convergente ad a. Per il Teorema degli accrescimenti finiti, $\exists \xi_n$, compreso tra a ed x_n tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)},$$

e quindi, siccome certamente ξ_n converge ad a,

$$\lim_n \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_n \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

IIRegola. Siano f, g derivabili in (a, b), con $g'(x) \neq 0$ vicino ad a, e tale che

$$\lim_{x \to a_+} |g(x)| = +\infty.$$

Se esiste, finito od infinito $\quad \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

allora esiste anche $\quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \quad$ e i due limiti sono uguali.

Sia $x_n \in (a,b)$, strettamente decrescente ad a, cosicché $g(x_n)$ diverge in modo monotono. Per il teorema degli accrescimenti finiti, esiste $\xi_n \in (x_{n+1}, x_n)$ tale che $\frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$, e quindi

$$\lim_n \frac{f(x_{n+1})-f(x_n)}{g(x_{n+1})-g(x_n)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dalla regola di Cesaro, segue allora che anche $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ esiste ed ha lo stesso valore. Dunque la tesi.

Senza Regola di Cesaro (nel caso a ed $L := \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ siano finiti).
Fissato ϵ sia $a < t_\epsilon$ tale che $|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L| \le \epsilon$ in $(a, t_\epsilon]$. Per $x \in (a, t_\epsilon]$, risulta

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(t_\epsilon)}{g(x)} + \frac{f(t_\epsilon)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(t_\epsilon)}{g(x)-g(t_\epsilon)} \frac{g(x)-g(t_\epsilon)}{g(x)} + \frac{f(t)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f'(\xi_{t_\epsilon,x})}{g'(\xi_{t_\epsilon,x})}(1 - \frac{f(t_\epsilon)}{g(x)}) + \frac{f(t_\epsilon)}{g(x)} \qquad \xi_{t_\epsilon,x} \in (x, t_\epsilon)$$

Ora, sia x_ϵ tale che $|\frac{f(t_\epsilon)}{g(x)}| < \epsilon$ per $x \in (a, x_\epsilon)$. Dunque

$$|\frac{f(x)}{g(x)} - L| \le |\frac{f'(\xi_{t_\epsilon,x})}{g'(\xi_{t_\epsilon,x})} - L| + 2L|\frac{f(t_\epsilon)}{g(x)}| + |\frac{f(t_\epsilon)}{g(x)}| \le \epsilon + (1+2L)\epsilon$$

5. Derivate successive e un'estensione del teorema del valor medio

Sia f derivabile in (a,b). Se a sua volta f' é derivabile in (a,b), si dice che f é derivabile due volte in (a,b), e si scrive

$$f''(x) := (f')'(x), \text{ od anche, al posto di } f'',\ D^2 f,\ \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Piú in generale, $f^{(n)}$, D^n, $\frac{d^n f}{dx^n}$, derivata n-esima, o di ordine n di f, indica, se esiste, la derivata della derivata n-1-esima, tutte le volte che questa esiste.

Una funzione si dice di classe $C^k([a,b])$ se ha derivate in ogni punto di $[a,b]$ fino all'ordine k, e $D^k f$ é continua.

Prop. Se $\phi \in C^n([0,1])$, allora esiste $\xi \in (0,1)$ tale che

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \ldots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\phi^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}$$

Basta applicare il teorema degli accrescimenti finiti alle funzioni

$$f(t) := \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n)}(t) + \ldots + (1-t)\phi'(t) + \phi(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!}\phi^{(k)}(t)$$

$g(t) := -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1!}$ giacché

$$f(1) = \phi(1), \qquad f(0) = \phi(0) + \phi'(0) + \ldots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}$$

$$f'(t) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(1-t)^k}{k!}\phi^{(k)}(t)\right)' =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(1-t)^k}{k!}\phi^{(k+1)}(t) + \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^{k-1}}{k-1!}\phi^{(k)}(t) =$$

$$\frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^{k-1}}{k-1!}\phi^{(k)}(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(1-t)^{k-1}}{k-1!}\phi^{(k)}(t) =$$

$$= \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)$$

e quindi

$$\frac{\phi(1) - \left[\phi'(0) + \ldots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}\right]}{\frac{1}{n+1!}} = \frac{\frac{(1-\xi)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(\xi)}{\frac{(1-\xi)^n}{n!}} = \phi^{(n+1)}(\xi)$$

5. La formula di Taylor con il resto secondo Lagrange

Sia $f \in C^{n+1}(x-\delta, x+\delta)$. Allora, se $|h| < \delta$ esiste $\theta = \theta(h) \in (0,1)$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \ldots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{n+1!}h^{n+1}$$

Posto $\phi(t) := f(x+th)$, risulta

$$\phi(1) = f(x+h), \phi(0) = f(x), \phi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x)h^k$$

Allora la formula per ϕ al punto 4 dá la formula di Taylor.