AM120 Tracce delle lezioni

21.03.11

AM120-2011 III Settimana

1. La formula di Taylor

Sia $f \in C^\infty(x_o - \delta, x_o + \delta)$, $n \in \mathbf{N}$. Per ogni $h \in (-\delta, \delta)$, esiste $t \in (0,1)$ tale che

$$f(x_o + h) = f(x_o) + f'(x_o)h + \frac{1}{2}f''(x_o)h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_o + th)}{n+1!}h^{n+1}$$

NOMENCLATURA

Il polinomio

$$P_n(h) := f(x_o) + f'(x_o)h + \frac{1}{2}f''(x_o)h^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}h^n$$

si chiama polinomio di Taylor di ordine n per f in x_o. La funzione $R_n(h) := f(x_o+h) - P_n(h)$ si chiama resto nella formula di Taylor, ed una sua rappresentazione, detta secondo Lagrange, é appunto data da

$$R_n(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_o + t(h)h)}{n+1!}h^{n+1}$$

Da tale rappresentazione segue in particolare che $\frac{R_n(h)}{h^n}$ tende a zero al tendere di h a zero, ovvero

$$f(x_o + h) = P_n(h) + o(h^n)$$

Tale relazione si chiama anche Formula di Taylor con il resto secondo Peano. É facile vedere che il polinomio di Taylor P_n é l'unico polinomio di grado n che approssima f a meno di un errore di ordine superiore all'n-esimo:

$$f(x_o+h)-Q_n(h)=o(h^n)\Rightarrow Q_n=P_n$$

Infatti, é allora $A_n := P_n - Q_n = o(h^n)$. Se $A_n(h) = a_o h^n + a_1 h^{n-1} + \dot{+} a_{n-1} h + a_n$. Da $A_n(h) \to 0$ al tendere di h a zero, segue $a_n = 0$; da $\frac{A_n(h)}{h} \to 0$ al tendere di h a zero, segue allora $a_{n-1} = 0$, e quindi $A_n(h) = a_o h^n + \ldots + a_2 h^2$ da cui $a_2 = 0$ perché $A_n(h) h^{-2} \to 0$ al tendere di h a zero, e cosi via. Dunque $Q_n = P_n$.

Esempi

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

Per sostituzione, si possono ottenere, a partire da sviluppi noti, nuovi sviluppi:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Di qui, tenendo conto che $\frac{1}{1+x^2}$ é la derivata di $\arctan x$, si ottiene lo sviluppo

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

2. Massimi/ minimi, locali liberi di funzioni regolari

Sia $f \in C^\infty$ su di un certo intervallo $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Sappiamo che

$$f(x_o) \le f(x) \quad \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \quad \Rightarrow \quad f'(x_o) = 0$$

e lo stesso se x_o é punto di massimo (locale) libero.

Valgono le seguenti condizioni perché x_o sia/non sia di massimo o di minimo:

Se $f^{(k)}(x_o) = 0\, \forall k < 2n+1$ e $f^{(2n+1)}(x_o) \neq 0$ allora x_o non é né di massimo né di minimo (locale) libero.

Se $f^{(k)}(x_o) = 0\, \forall k < 2n$ e $f^{(2n)}(x_o) > 0 (< 0)$ allora x_o é di minimo (rispettivamente, di massimo).

Ció segue dalla formula di Taylor:

$$f(x_o + h) = f(x_o) + [\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!} + o(1)]h^m$$

giacché, se m é dispari, $f(x_o+h) - f(x_o)$ cambia di segno insieme ad h, mentre, se m é pari, $f(x_o+h) - f(x_o)$ ha , per h piccolo, segno costante, quello di $f^{(m)}(x_o)$. Notiamo che lo stesso argomento dice che 'condizione necessaria perché un punto stazionario x_o (cioé tale che $f'(x_o) = 0$) sia punto di minimo (locale) libero é che la prima derivata non nulla in x_o (se esiste) sia di ordine pari.

3. Una applicazione della formula di Taylor allo studio della convessitá

Definizione di funzione convessa $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ si dice convessa se

$$a \leq x_1 < x_2 \leq b,\ t \in [0,1] \quad \Rightarrow \quad f(tx_2 + (1-t)x_1) \ \leq \ tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$$

Il significato geometrico di questa diseguaglianza é il seguente:
presi due punti qualsiasi, diciamo $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, del grafico di f, tale grafico si trova, nell'intervallo $[x_1, x_2]$ interamente al di sotto della retta passante per quei due punti.
Per vederlo, scriviamo il segmento $[x_1, x_2]$ in forma parametrica:

$$x_t := tx_2 + (1-t)x_1, \quad t \in [0,1]$$

(chiaramente $x_t \in [x_1, x_2]$ e per ogni $x \in [x_1, x_2]$ esiste un unico $t \in [0,1]$ tale che $x_t = x$; in altre parole $t \to x_t$ é biiezione tra l'intervallo $[0,1]$ e l'intervallo $[x_1, x_2]$) ed osserviamo che la retta passante per $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, che ha equazione

$$y = y(x) = f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2)$$

passa anche per $(x_t, tf(x_2) + (1-t)f(x_1))$, ovvero $\quad y(x_t) = tf(x_2) + (1-t)f(x_1)$ e quindi la convessitá si riscrive $f(x_t) \leq y(x_t) \quad \forall x_1, x_2 \in [a,b], t \in [0,1]$, ovvero

$$f(x) \leq f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \forall x \in [x_1, x_2]$$

Chiamato *epi*$_f$=*epigrafico* di f l'insieme dei punti che stanno sopra il grafico di f:

$$epi_f := \{(x,y): \quad x \in [a,b], \quad y \geq f(x)\}$$

possiamo dire che f é convessa se ogni segmento congiungente due punti del grafico di f é interamente contenuto nell'epigrafico di f.
Detto allora *convesso* un sottoinsieme C di $\mathbf{R}^2$ che abbia la proprietá seguente

$$(x_1,y_1),(x_2,y_2) \in C \Rightarrow t(x_2,y_2)+(1-t)(x_1,y_1) := (tx_2+(1-t)x_1, ty_2+(1-t)y_1 \in C$$

ovvero C *é convesso se e solo se, contenendo due punti contiene anche il segmento che li unisce* é immediato verificare che *una funzione é convessa se e solo se il suo epigrafico é un insieme convesso*

ESERCIZIO. Dato un insieme di indici $\mathcal{A}$ ed una famiglia di funzioni $f_\alpha, \quad \alpha \in \mathcal{A}$ definite in $E \subset \mathbf{R}$, resta definita in E la funzione

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha : x \to \sup\{f_\alpha(x): \quad \alpha \in \mathcal{A}\}$$

Ad esempio,

$$f^+(x) := max\{f(x), 0\}$$

é la funzione f messa uguale a zero nei punti in cui é negativa. Analogamente

$$f^-(x) := max\{-f(x), 0\}. \qquad \text{Nota che} \qquad f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-$$

Provare che

$$f_\alpha \quad \text{convesse} \quad \Rightarrow \quad \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha \quad \text{é convessa}$$

Infatti, da

$$f_\alpha(tx_2 + (1-t)x_1) \leq \quad tf_\alpha(x_2) + (1-t)f_\alpha(x_1) \leq t \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x_2) + (1-t) \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x_1)$$

segue, prendendo il sup a primo membro, che

$$\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(tx_2 + (1-t)x_1) \leq t \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x_2) + (1-t) \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} f_\alpha(x_1)$$

Proposizione 1 Sia f convessa in (a,b), $x_0 \in (a,b)$. Allora

(i) $x \to \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ é non decrescente in (a,x_0) e in (x_0,b)

(ii) $x_1 < x_2 < x_3 \quad \Rightarrow \quad \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} \geq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

(iii) per ogni $x_0 \in (a,b)$ esistono finiti $f'_-(x_0)$ ed $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$.

Prova di (i).
Sia $x_1 < x < x_0$. Dalla convessitá (prendendo x_0 come x_2), troviamo $f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)$ e quindi, dividendo per $x - x_0$ (che é negativo) troviamo $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$.
Se $x_0 < x < x_2$, dalla convessitá, prendendo x_0 come x_1, troviamo $f(x) \leq f(x_0) + \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}(x-x_0)$ e quindi $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$.

Prova di (ii).
La monotonia di $x \to \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$ in $(x_1, x_3]$ fornisce $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$.
La monotonia di $x \to \frac{f(x)-f(x_3)}{x-x_3}$ in $[x_1, x_3)$ fornisce $\frac{f(x_1)-f(x_3)}{x_1-x_3} \leq \frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$.

Prova di (iii). Siano $x_1 < x_0 < x_2$.
Dalla monotonia di $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ a sinistra e a destra di x_0 e da (ii) segue che

$$\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \leq f'_-(x_0) := \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \sup_{x<x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq$$

$$\leq \inf_{x>x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'_+(x_0) \leq \frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$$

Corollario Sia f convessa in $[a,b]$. Allora

(i) f é continua in (a,b)

(ii) f é derivabile in (a,b) ad eccezione al piú di un insieme numerabile di punti.

Prova.
Da 'esiste finito il limite, al tendere di x a x_0 da sinistra (destra) di $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$', segue che il numeratore $f(x) - f(x_0)$ deve tendere a zero, e quindi $f(x)$ tende, al tendere di x a x_0 da sinistra (da destra) a $f(x_0)$. Dunque $f(x)$ tende a $f(x_0)$ al tendere di x a x_0.

Da (iii), vediamo che la f é derivabile a destra e a sinistra in ogni punto e che, se f non é derivabile in x_0, resta definito l'intervallo non vuoto $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$.
Inoltre, se $x_1 > x_0$ é un altro punto in cui f non é derivabile, allora $(f'_+(x_0) \leq f'_-(x_1))$ e quindi $(f'_-(x_0), f'_+(x_0))$ e $(f'_-(x_1), f'_+(x_1))$ sono disgiunti (analogamente se $x_1 < x_0$). Dunque la famiglia dei punti di non derivabilitá di f individua una famiglia di intervalli aperti disgiunti. Siccome ogni intervallo aperto individua (almeno) un

razionale, e quindi una famiglia di intervalli disgiunti individua una famiglia di razionali (distinti tra loro!), tale famiglia puó essere, al pari di $\mathbf{Q}$, al piú numerabile.

Proposizione 2

Sia f dotata di derivata seconda continua in $[a,b]$. Allora le affermazioni che seguono sono equivalenti

(i) $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

(ii) $f(x) \geq f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o), \ \forall x, x_o \in [a,b]$

(iii) f é convessa in $[a,b]$

(i) $\Rightarrow$ (ii). Segue subito dalla formula di Taylor:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_o)^2$$

ove ξ é un opportuno punto tra x e x_o.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Posto $g_{x_o}(x) := f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o)$, sia

$$g(x) := \sup_{x_o \in [a,b]} g_{x_o}(x)$$

Da una parte, $g(x_o) \geq g_{x_o}(x_o) = f(x_o) \quad \forall x_o \in [a,b]$. D'altra parte, l'ipotesi dice che $f(x) \geq g_{x_o}(x) \quad \forall x, x_o \in [a,b]$ e quindi, fissato x e prendendo il sup rispetto a x_o, troviamo $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a,b]$. Dunque $f(x) = g(x)$ in $[a,b]$. Dunque f é convessa perché le g_{x_o} sono ovviamente convesse, e l'estremo superiore di una famiglia di funzioni convesse é una funzione convessa.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Supponiamo, per assurdo, che f'' sia negativa in qualche punto, e quindi, per la permanenza del segno, in tutto un intervallo $[x_1, x_2] \subset [a,b]$. Posto

$$\phi(t) := f(tx_2 + (1-t)x_1) - [tf(x_2) + (1-t)f(x_1)], \quad t \in [0,1]$$

risulta

$$\phi(0) = \phi(1) = 0, \quad \phi(t) \leq 0 \quad \forall t \in [0,1]$$
$$\phi''(t) = f''(tx_2 - (1-t)x_1)(x_2 - x_1)^2 < 0 \, \forall t \in [0,1]$$

D'altra parte, da $\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \frac{1}{2}\phi''(t_o)$ segue $\phi'(0) > 0$, contraddicendo il fatto che $\phi(t) \leq 0, \ \forall t$.