AM120 Settimana 5

SVILUPPI IN SERIE DI TAYLOR

SERIE DI TAYLOR Sia $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$. Sia $h := x - x_0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n$$

si chiama serie di Taylor di f di punto iniziale x_0.

SVILUPPABILITÁ IN SERIE DI TAYLOR

f si dice **sviluppabile in serie di Taylor** attorno ad x_0 se

$$\exists r > 0 : \quad f(x_0+h) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n, \qquad \forall h \in (-r, r)$$

NOTA. $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ é $C^\infty(\mathbf{R})$ ma non é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad $x_0 = 0$ perché $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

ESEMPIO 1 $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \forall x \in (-1,1)$

(serie di Mac Laurin, cioé di punto iniziale $x_0 = 0$). Se $f(x) := \frac{1}{1-x}$, é $f^{(n)}(0) = n!$. Notiamo che il resto n-esimo nella formula di Taylor (di punto iniziale zero) é $R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{x^{n+1}}{1-x} \to_n 0 \quad \forall x \in (-1,1)$.

Si deducono gli sviluppi $\qquad \dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \qquad \dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

ESEMPIO 2. $\log(1-x) = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad$ per $\quad |x| < 1$

Notiamo che, per il criterio della radice, la serie di Taylor converge se $|x| < 1$. Che la serie abbia per somma la funzione data, segue anche qui dal fatto che $|R_n(x)| \to_n 0 \quad \forall x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, giacché $|R_n(x)| = |-\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-\xi)^{n+1}}|$ ove $|\xi| < |x| < 1$ e quindi $1 - \xi > 1 - |x|$ e quindi $\frac{|x|}{|1-\xi|} < 1$ se $|x| < \frac{1}{2}$.
E ció in accordo con la seguente

Proposizione $f \in C^\infty((x_0-\delta, x_0+\delta))$ é sviluppabile in serie di Taylor attorno ad x_0 sse $\exists r > 0 : \; R_n(x_0, h) \to_{n\to+\infty} 0 \;\; \forall h \in [-r, r]$.

Infatti $f(x_0+h) - \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n \;=\; R_N(x_0,h)$.

In particolare, se esistono $r>0, M_r>0$ tali che

$$\sup_{|h|\le r} |f^{(n)}(x_0+h)| \;\le\; \frac{M_r n!}{r^n} \quad \forall\; n\in\mathbf{N}$$

allora f é somma, per ogni $|h|<r$, della sua serie di Taylor centrata in x_0. Infatti, $|R_n(x_0,h)| = |\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\bar{t}h)| \le \frac{M_r|h|^{n+1}}{r^{n+1}} \to_n 0$ se $|h|<r$.

In particolare, se per ogni $r>0$ esiste $M_r>0$ tale che

$$\max_{|x|\le r} |f^{(n)}(x)| \;\le M_r \quad \forall n$$

allora f é 'intera', cioé é somma della sua serie di Mac Laurin su tutto $\mathbf{R}$. Infatti, $|x| \;\le r \;\Rightarrow\; |R_n(x)| \;\le\; \frac{r^{n+1}}{n+1!} \sup_{|x|\le r} |f^{(n+1)}(x)| \;\le\; \frac{M_r\, r^{n+1}}{n+1!} \to_n 0 \;\Rightarrow$

$$f(x) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n, \qquad \forall x\in\mathbf{R}$$

Si ottengono subito, ad esempio, i seguenti sviluppi in serie validi in tutto $\mathbf{R}$:

$$e^x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sin x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cos x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\sinh x \;=\; \frac{1}{2}[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \;-\; \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1!} \qquad \cosh x \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!}$$

SERIE BINOMIALE

$$(1+x)^\alpha \;=\; 1 \;+\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n \qquad \forall x\in(-1,1)$$

Infatti, $\frac{d^n}{dx^n}(1+x)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Notiamo che, posto $a_n := \frac{|\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)||x|^n}{n!}$, é $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to |x|$ e quindi la serie converge se $|x|<1$. Poi, $|\frac{R_{n+1}(x)}{R_n(x)}| \;=\; \frac{|\alpha-n|\,|x|}{(n+1)|1+tx|} \;<\; 1$ se $|x| \;<\; \frac{1}{2}$ per n grande, e quindi $R_n(x) \to_n 0$ se $|x|<\frac{1}{2}$.
Ad esempio, per $x\in(-1,1)$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \;=\; 1 \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \frac{2n-1!!}{n!} x^n \;=\; 1 \;+\; \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n} \qquad \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^{2n}$$

NOTA. In tutti gli esempi visti il resto converge a zero per tutti e solo gli h in un intervallo del tipo $|h| < r$. Non é un caso....

SERIE DI POTENZE

Dati $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots, \quad x \in \mathbf{R}$, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n \qquad (SP)$$

si chiama serie di potenze .

L'insieme delle x per cui (SP) converge é necessariamente un intervallo centrato nell'origine, detto intervallo di convergenza. Il suo raggio si chiama raggio di convergenza della serie.

Infatti, se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x_0^n$ converge, allora $|a_n x_0^n|$ é limitata e quindi

$$|x| < |x_0| \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;\le\; \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x_0^n|\, |\frac{x}{x_0}|^n \;\le\; \sup_n |a_n\, x_0^n| \;\sum_{n=0}^{\infty} |\frac{x}{x_0}|^n < +\infty$$

Dunque il raggio di convergenza é $\quad \sup\{|x| : \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| < +\infty\}$.

Proposizione (Formula di Cauchy-Hadamard).

Il raggio di convergenza r di (SP) é dato dalla formula

$$r \;=\; \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

$((\frac{1}{0} := \; +\infty, \;\; \frac{1}{\infty} \; := \; 0)$. Infatti

$$|x| \;<\; r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;<\; +\infty, \qquad |x| \;>\; r \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;=\; +\infty$$

Ció segue subito dal criterio della radice:

$$|x| \;\limsup_n\, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup_n\, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \;<\; 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;<\; +\infty$$

$$|x| \;\limsup_n\, (|a_n|)^{\frac{1}{n}} \;=\; \limsup_n\, (|x|^n |a_n|)^{\frac{1}{n}} \;>\; 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n\, x^n| \;=\; +\infty$$

Dunque $\{|x| < r\}$ é l' intervallo di convergenza.

NOTA. $\exists\, r := \lim |\frac{a_n}{a_{n+1}}| \;\Rightarrow\; |a_n|^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{r} \;\Rightarrow\; r$ é raggio di convergenza.
Ad esempio, la serie di Mac Laurin di $\frac{1}{1-x}$, di $\log(1+x)$, di $(1+x)^\alpha, \alpha \notin \mathbf{N}$ hanno raggio di convergenza 1 (é utile ricordare che $n^{\frac{1}{n}} \to_n 1$).

ESEMPI (di serie di potenze).

(1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^n\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 0$. Infatti $(n^n)^{\frac{1}{n}} = n \to +\infty$

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = +\infty$. Infatti $\frac{(n+1)!}{n!} \to +\infty$.

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^\alpha\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = 1$. Infatti $(n^\alpha)^{\frac{1}{n}} = (n^{\frac{1}{n}})^\alpha \to 1$

(4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\, x^n$ ha raggio di convergenza $r = \frac{1}{e}$. Infatti,

$$\frac{n^n}{n!}\;\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; (\frac{n}{n+1})^n \to \frac{1}{e}.$$

NOTA. Dagli esempi precedenti si vede che una serie di potenze puó avere qualsiasi comportamento agli estremi dell'intervallo di convergenza.
In (3) :
se $\alpha \geq 0$ la serie diverge in $x = 1$ mentre non converge né diverge in $x = -1$
Se $\alpha \in [-1, 0)$, la serie diverge in $x = 1$ e converge in $x = -1$ (Leibnitz)
se $\alpha < -1$ la serie converge assolutamente sia in $x = 1$ che in $x = -1$.

In (4) : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!}\;\frac{1}{e^n} \;= +\infty$ perché, da

$$n! = \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\left(\sqrt{2\pi} + O(\frac{1}{n})\right) \qquad \textbf{(formula di Stirling)}$$

segue $\frac{n^n}{n!\, e^n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{2n\pi} + \circ(\sqrt{n})}$. Infine, la serie converge in $x = -\frac{1}{e}$ (Leibnitz).

5. $1 \,+\, \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-1!!}{2n!!} x^n$ (serie di Mac Laurin di $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$).
Ha raggio di convergenza 1 (come tutte le serie binomiali). Comportamento al bordo: siccome $\frac{2n-1!!}{2n!!} : \frac{2n+1!!}{2n+2!!} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1$, la serie converge in $x = 1$ (criterio di Leibnitz) mentre in $x = -1$ diverge perché, per Stirling,

$$\frac{2n-1!!}{2n!!} \;=\; \frac{2n!}{(2n!!)^2} \;=\; \frac{2n!}{2^{2n}(n!)^2} \;=\; O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Proposizione . Sia $r > 0$ il raggio di convergenza di $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$. Allora

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\,[a_n\, x^n]$$

NOTA $\quad \limsup |n\, a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$ e quindi la 'serie derivata' (ovvero la serie delle derivate) ha lo stesso raggio di convergenza della serie data.

Sia $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < r.$ Essendo le due serie assolutamente convergenti per ogni $|x| < r$, si ha $\quad \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\right| =$

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{(x+h)^n - x^n}{h} - n\, x^{n-1}\right)\right| = \left|\sum_{n=2}^{\infty} n\, a_n \left[\int_0^1 \left((x+th)^{n-1} - x^{n-1}\right) dt\right]\right|$$

Siccome $|(x+th)^{n-1} - x^{n-1}| = (n-1)|ht \int\limits_0^1 (x+\tau th)^{n-2} d\tau| \leq (n-1)|h|(|x|+|h|)^{n-2}$ e $|x| + |h| < r$ se $|x| < r$ e h é abbastanza piccolo, concludiamo che

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}\right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, |a_n|\, \underline{r}^{n-2} \to_{h\to 0} 0$$

per qualche $\underline{r} < r$.