AM120: Settimane 9 e 10

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI REALI DI UNA VARIABILE REALE

A titolo introduttivo, consideriamo due problemi, apparentemente scollegati:

PROBLEMA 1. (esistenza di una primitiva). Data f in un intervallo aperto I, esiste P (*primitiva*) derivabile in I e tale che $P' = f$?

PROBLEMA 2. Data $f \geq 0$ in $[a, b]$, come definire l'area del sottografico $\{(x, y) : \quad x \in [a, b], 0 \leq y \leq f(x)\}$?

La risposta al Problema 1 é: in generale NO. Una condizione necessaria é data dal

Teorema di Darboux

Se $P' = f$ in I intervallo aperto, allora f ha la proprietá del valore intermedio.

PROVA. Sia $\alpha = f(a), \beta = f(b), a, b \in I$. Possiamo supporre $a < b, \alpha < \beta$. Preso $\alpha < \gamma < \beta$, sia $g(x) = P(x) - \gamma x$. Siccome P é continua, g ha minimo in $[a, b]$. Tale minimo non puó essere preso in a, perché $g'(a) = \beta - \gamma < 0$, né in b, perché $g'(b) > 0$. Dunque il punto di minimo, diciamo c, é interno e quindi $0 = g'(c) = P'(c) - \gamma = f(x) - \gamma$, ovvero $f(c) = \gamma$.

Tale proprietá peró non basta. Un esempio: $f(x) = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$ e $P^{\pm}(x) = x \sin \frac{1}{x} + c^{\pm}$ sono le sue primitive in $(0, +\infty)$ e in $(-\infty, 0)$. Ma f, pur godendo ovviamente della proprietá del valore intermedio, non ammette primitiva P in $(-1, 1)$. Infatti dovrebbe essere $P = x \sin \frac{1}{x} + c^{-}$ in $(-1, 0)$ e $P = x \sin \frac{1}{x} + c^{+}$ in $(0, 1)$ e quindi, per continuitá, $c^{+} = c^{-}$, ovvero $P = x \sin \frac{1}{x} + c$ per qualche c che peró non é derivabile in zero per alcun c.

Circa il problema 2, vedremo un modo molto naturale di definire, nel caso ad esempio che f sia continua, l'area del suo sottografico. Indaghiamo qui su come la risoluzione del problema 2 porti a risolvere anche il problema 1. Chiamiamo $A(x), x \in (a, b)$ l'area del sottografico di f ristretta ad $[a, x]$. Se questa funzione ha le proprietá che ci aspettiamo dall'area (additivitá), avremo che il rapporto incrementale $\frac{A(x+h)-A(x)}{h}$ si scrive come $f(x)$ piú l'area del triangoloide di vertici $(x, f(x), (x + h, f(x)), (x + h, f(x + h)$. Siccome f é limitata tale area deve andare (per la monotonia dell'area) a zero, e quindi $A(x)$ é una primitiva di f.

NOTAZIONI:

$+\infty\, a := +\infty$ se $a > 0$ e $0\,\infty := 0$.
Se I é un intervallo, $l(I)$ indicherá la sua lunghezza ($l(I) = +\infty$ se I é illimitato).
Se $I_j,\ j = 1,\dots,n$ sono intervalli disgiunti, scriveremo $l(\cup_{j=1}^n I_j) = \sum_{j=1}^n l(I_j)$.
Notare anche che se J_i sono n intervalli é $l(\cup_i J_i) \leq \sum_i l(J_i)$.
$(*)$ Se gli $I_j, j \in \mathbf{N}$ sono disgiunti e $I := \cup_{j=1}^{+\infty} I_j$ é intervallo, allora $l(I) = \sum_{j=1}^{+\infty} l(I_j)$ (vedi Appendice).

Chiameremo qui **partizione** di $\mathbf{R}$ una famiglia I_j di intervalli disgiunti, chiusi a sinistra e aperti a destra, tale che $\cup_{j=1}^\infty I_j = \mathbf{R}$.
Se $I_j,\ J_i$ sono partizioni, $I_{ij} := I_j \cap J_i$, é partizione (che chiameremo 'il raffinamento' delle due partizioni). Notare che $I_j = \cup_i I_{ij},\ \ J_i = \cup_j I_{ij}$ (unioni disgiunte!)

Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ A \subset \mathbf{R}$. Qui e nel seguito considereremo solo **funzioni limitate**, cosicché le seguenti sono sempre quantitá finite:

$$\inf_A f := \inf\{f(x) : x \in A\}, \qquad \sup_A f := \sup\{f(x) : x \in A\}$$

Se $A \subset \mathbf{R}$, $\chi_A \equiv 1$ in A, $\chi_A \equiv 0$ fuori di A é la funzione caratteristica di A.

$f^+ := f\chi_{\{x:f(x)\geq 0\}}$ $\quad (f^+(x) = 0$ se $f(x) \leq 0$, $f^+(x) = f(x)$ se $f(x) \geq 0)$

$f^- := -f\chi_{\{x:f(x)\leq 0\}}$ $(f^-(x) = 0$ se $f(x) \geq 0$, $f^-(x) = -f(x)$ se $f(x) \leq 0)$

1. ALCUNI FATTI ELEMENTARI

1.1 $\inf\limits_{A\cup B} f \leq \inf\limits_A f \leq \sup\limits_A f \leq \sup\limits_{A\cup B} f$

1.2 $\inf\limits_A f + \inf\limits_A g \leq \inf\limits_A (f+g) \leq \sup\limits_A (f+g) \leq \sup\limits_A f + \sup\limits_A g$

1.3 $\sup\limits_A (-f) = -\inf\limits_A f, \qquad \inf\limits_A (-f) = -\sup\limits_A f$ e quindi

1.4 $\inf\limits_A f - \sup\limits_A g \leq \inf\limits_A (f-g) \leq \sup\limits_A (f-g) \leq \sup\limits_A f - \inf\limits_A g$

1.5 $f = f^+ - f^-, \qquad |f| = f^+ + f^-, \qquad (-f)^+ = f^-, \qquad (-f)^- = f^+$

1.6 $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+, \qquad (f+g)^- \leq f^- + g^-$.

2. **Integrabilitá ed integrale per funzioni limitate non negative.**

2.1 **Somme (inferiori/superiori) di Riemann, integrale (inferiore/superiore)**

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) \geq 0 \ \forall x$. Sia I_j partizione di $\mathbf{R}$. Scriveremo

$$s(f; I_j) := \sum_j (\inf_{I_j} f) \ l(I_j) \qquad \text{(somme inferiori)}$$

$$S(f; I_j) := \sum_j (\sup_{I_j} f) \ l(I_j) \qquad \text{(somme superiori)}$$

$$\underline{I}(f) := \sup\{s(f; I_j) : \ I_j \ \text{ partizione di } \mathbf{R}\} \qquad \text{(integrale inferiore)}$$

$$\overline{I}(f) := \inf\{S(f; I_j) : \ I_j \ \text{ partizione di } \mathbf{R}\} \qquad \text{(integrale superiore)}$$

NOTA 1. Puó accadere che $S(f; I_j) = +\infty$ per ogni ricoprimento I_j, od anche $s(f; I_j) = +\infty$ per un ricoprimento e quindi $\underline{I}(f)$ o $\overline{I}(f)$ possono valere $+\infty$.

LEMMA 1 *(raffinando la partizione le somme inferiori crescono, le somme superiori decrescono).* Se I_j, J_i sono due partizioni e $I_{ij} := I_j \cap J_i$, allora

$$s(f; I_j) \leq s(f; I_{ij}) \leq S(f; I_{ij}) \leq S(f; J_i)$$

e quindi $\quad s(f; I_j) \ \leq \ S(f; J_i) \quad$ e quindi $\quad \underline{I}(f) \leq \overline{I}(f)$

Infatti, da (*) segue:

$$s(f; I_{ij}) = \sum_{ij} \inf_{I_{ij}} \ f \, l(I_{ij}) \ \geq \ \sum_j \ \sum_i \inf_{I_j} f \, l(I_{ij}) \ = \ \sum_j \ \inf_{I_j} f \, l(I_j) = s(f; I_j)$$

$$S(f; I_{ij}) = \sum_{ij} \sup_{I_{ij}} \ f \, l(I_{ij}) \ \leq \ \sum_j \ \sum_i \sup_{I_j} f \, l(I_{ij}) \ = \ \sum_j \ \sup_{I_j} f \, l(I_j) = S(f; I_j)$$

ALCUNI ESEMPI.

Sia $0 \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in \mathbf{R}, \ \ f(x) = 0$ se $|x| \geq R$. Allora $\overline{I}(f) \leq 2MR$. Infatti, se $I_1 := (-\infty, R), I_2 := [-R, R), I_3 := [R, +\infty)$, allora $S(f; I_j) = \sup_{I_2} f \leq 2MR$.

Sia J un intervallo aperto, $f = \chi_{\mathbf{Q} \cap J}$. É $\quad \overline{I}(f) = l(J), \quad \underline{I}(f) = 0. \quad$ Infatti, sia I_j partizione di $\mathbf{R}$. Se $I_j \cap J \neq \emptyset$ é $\sup_{I_j} f = 1, \inf_{I_j} f = 0$ per ogni intervallo I_j.

Sia $f(x) = \frac{1}{x^2}\chi_{[1,+\infty)}$ e siano $I_0 = (-\infty, 1), I_j = [j, j+1) \quad \forall \in \mathbf{N}$. Allora $S(f, I_j) = \sum_j \frac{1}{j^2}$ e quindi $\overline{I}(f) < +\infty$.

DEFINIZIONE $f \geq 0$ é integrabile su $\mathbf{R}$ se $\overline{I}(f) < +\infty$ e $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$. Diremo che f é a integrale convergente e $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := \overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ é l'integrale di f. Se invece $\underline{I}(f) = +\infty$, diremo che f é a integrale divergente.

NOTA 2. Puó accadere che $\overline{I}(f) = +\infty$, e $\underline{I}(f) < +\infty$. Esempio: $f = \chi_{\mathbf{Q}}$.

LEMMA 2 $\overline{I}(f) < +\infty$ e $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ se e solo se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists I_j$ partizione :

$$S(f; I_j) < +\infty \quad \text{e} \quad \sum_j (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)\ l(I_j) = \quad S(f; I_j) - s(f; I_j) \leq \epsilon$$

ed in tal caso $S(f; I_j), s(f; I_j) \in [I(f) - \epsilon, I(f) + \epsilon]$.

Esempi
1. Se I é intervallo limitato, χ_I é integrabile e $\int_{\mathbf{R}} \chi_I = l(I)$. Sia $I^c = I_1 \cup I_2, I_1 \cap I_2 = \emptyset$, $I_3 := I$. Usando la partizione I_1, I_2, I_3, si trova $S(\chi_I; I_j) = l(I) = s(\chi_I; I_j)$

2. Se I_j sono intervalli limitati disgiunti, $\chi_{\cup_{j=1}^n I_j}$ é integrabile per ogni n e $\int \chi_{\cup_{j=1}^n I_j} = \sum_{j=1}^n l(I_j)$. Segue da $\chi_{\cup_{j=1}^n I_j} = \sum \chi_{I_j}$ e dalla linearitá dell'integrale.
Domanda: $\chi_{\cup_{j=1}^\infty I_j}$ *é integrabile? Risposta: in generale no! Peró...(vedi Appendice)*

3. $f(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} a_j \chi_{[j-1,j)}(x)$, $a_j \geq 0$ (funzione costante a tratti: vale a_j in $[j-1, j)$ e vale 0 in $(-\infty, 0)$). Se $I_0 = (-\infty, 0), I_j = [j-1, j), j = 1, 2, \ldots,$ é $S(f; I_j) = s(f; I_j) = \sum_j a_j$. Dunque f é integrabile se e solo se la serie $\sum_j a_j$ converge e $I(f) = \sum_{j=1}^\infty a_j$.

2.2 **Integrabilitá delle funzioni continue** Sia $f \in C(\mathbf{R}), f \geq 0$. Allora

$$\forall \epsilon,\ \exists I_j^\epsilon,\ j \in \mathbf{N} : \qquad \sum_{j=1}^\infty [(\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f) l(I_j)] \leq \epsilon. \qquad \text{In particolare,}$$

$$\overline{I}(f) < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \text{ é integrabile,} \qquad \text{mentre} \quad \overline{I}(f) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \underline{I}(f) = +\infty.$$

Prova. Siano $\epsilon > 0$, $I_i = [i, i+1)$, $i \in \mathbf{Z}$. Siccome f é uniformemente continua sui limitati, $\forall i, \exists \delta_\epsilon^i$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2^{|i|}}$ se $x, y \in I_i$ e $|x - y| \leq \delta_\epsilon^i$. Se $\frac{1}{n_i} \leq \delta_\epsilon^i$, siano $I_{i,j} = [i+\frac{j-1}{n_i}, i+\frac{j}{n_i}), j = 1, \ldots, n_i$. Allora $|f(x)-f(y)| \leq \frac{\epsilon}{2^{|i|}}$ se $x, y \in I_{i,j}, \forall i, j$. Dunque $\sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} [\sum\limits_{j=1}^{n_i} (\sup\limits_{I_{i,j}} f - \inf\limits_{I_{i,j}} f) l(I_{i,j})] \leq \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} [\sum\limits_{j=1}^{n_i} \frac{\epsilon}{2^{|i|} n_i}] \leq \sum\limits_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\epsilon}{2^{|i|}} = 3\epsilon$. Ció dice che $\sum\limits_{ij} \sup\limits_{I_{i,j}} f\, l(I_{i,j}) < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{ij} \inf\limits_{I_{i,j}} f\, l(I_{i,j}) < +\infty$ e $\sum\limits_{ij} [\sup\limits_{I_{i,j}} f l(I_{i,j}) - \inf\limits_{I_{i,j}} f l(I_{i,j})] \leq 3\epsilon$. E dice anche che $\sum\limits_{ij} \sup\limits_{I_{i,j}} f\, l(I_{i,j}) = +\infty \Rightarrow \sum\limits_{ij} \inf\limits_{I_{i,j}} f\, l(I_{i,j}) = +\infty \Rightarrow \underline{I}(f) = +\infty$.

NOTA 3. Se f ha un punto di discontinuitá, diciamo in x_0, modificando la partizione I_j in $I_j \cap J_i$, ove $J_1 = [-\infty, x_0 - \delta)$, $J_2 = [x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $J_3 = [x_0 + \delta, +\infty)$ e $\delta \sup_{J_2} f \leq \epsilon$, vediamo che $S(f; I_j) - s(f; I_j) \leq 2\epsilon$, ovvero f é integrabile, se $\overline{I}(f) < \infty$. Se f ha una successione di discontinuitá isolate x_l e $\delta_l \sup_{|x-x_l| \leq \delta_l} f \leq \frac{\epsilon}{2^l}$, si trova ancora $S(f; I_j) - s(f; I_j) \leq 2\epsilon$ e quindi f é integrabile, se $\overline{I}(f) < \infty$.

LEMMA 3. (i) $f, g \geq 0$ integrabili e $\alpha, \beta \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g$ é integrabile e $\quad I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \quad$ (ii) $f \leq g \quad \Rightarrow \quad I(f) \leq I(g)$.

(i) É $\underline{I}(\alpha f) = \alpha \underline{I}(f)$ $\overline{I}(\alpha f) = \alpha \overline{I}(f)$ perché $\inf_I (\alpha f) = \alpha \inf_I f$, $\sup_I (\alpha f) = \alpha \sup_I f$. Integrabilitá della somma: dall'ipotesi segue che esistono partizioni I_j, J_i tali che

$$S(f; I_j) + S(g; J_i) < +\infty, \quad S(f; I_j) - s(f; I_j) \leq \epsilon, \qquad S(g; J_i) - s(g; J_i) \leq \epsilon$$

Dunque, se $I_{ij} := I_j \cap J_i$, allora

$$S(f + g; I_{ij}) \leq S(f; I_{ij}) + S(g; I_{ij}) \leq S(f; I_j) + S(g; J_i) < +\infty$$

$$S(f + g; I_{ij}) - s(f + g; I_{ij}) \leq S(f; I_{ij}) + S(g; I_{ij}) - [s(f; I_{ij}) + s(g; I_{ij})] \leq 2\epsilon$$

Dunque $f + g$ é integrabile. Inoltre

$$I(f) + I(g) \leq s(f; I_{ij}) + \epsilon + s(g; I_{ij}) + \epsilon \leq s(f + g; I_{ij}) + 2\epsilon \leq I(f + g) + 2\epsilon$$

$$I(f) + I(g) \geq S(f; I_{ij}) - \epsilon + S(g; I_{ij}) - \epsilon \geq S(f + g; I_{ij}) - 2\epsilon \geq I(f + g) - 2\epsilon$$

e quindi $I(f + g) = I(f) + I(g)$. (ii) $f \leq g \Rightarrow \sup_I f \leq \sup_I g \quad \forall I \Rightarrow \overline{I}(f) \leq \overline{I}(g)$.

NOTA 4. Notiamo che é in generale falso che $\underline{I}(f + g) = \underline{I}(f) + \underline{I}(g)$. Prendere ad esempio $f = \chi_{\mathbf{Q}}, \;\; g = \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}$: $\;\; \underline{I}(f + g) = +\infty, \underline{I}(f) = \underline{I}(g) = 0$.

2.3 **Integrabilitá ed integrale per funzioni limitate.**

$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ **limitata** é (Riemann) integrabile su $\mathbf{R}$ se si puó scrivere come differenza di due funzioni non negative integrabili: $f = f_1 - f_2$, $f_i \geq 0$ integrabili. In tal caso scriveremo

$$I(f) = \int_{\mathbf{R}} f = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx := I(f_1) - I(f_2)$$

NOTA 5. *La definizione data é ben posta*, nel senso che se é $f_1 - f_2 = f = \tilde{f}_1 - \tilde{f}_2$ con $\tilde{f}_i \geq 0$ integrabili, allora $\tilde{f}_1 + f_2 = \tilde{f}_2 + f_1$ é integrabile e $I(\tilde{f}_1) + I(f_2) =$

$I(\tilde{f}_1 + f_2) = I(\tilde{f}_2 + f_1) = I(\tilde{f}_2) + I(f_1)$ e quindi $I(\tilde{f}_1) - I(\tilde{f}_2) = I(f_1) - I(f_2)$.

LEMMA 4 Sia $f = f_1 - f_2$, ove f_1, f_2 sono non negative e integrabili. Allora, per ogni $\epsilon > 0$ esiste una partizione I_j tale che

$$\sum_j (\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f)\ l(I_j) \leq \epsilon$$

Prova. f_1, f_2 integrabili $\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists$ una partizione I_j tale che:

$$\sum_j (\sup_{I_j} f_1)\ l(I_j) - \sum_j (\inf_{I_j} f_1)\ l(I_j) \leq \epsilon \quad e \quad \sum_j (\sup_{I_j} f_2)\ l(I_j) - \sum_j (\inf_{I_j} f_2)\ l(I_j) \leq \epsilon$$

Da 1.4 segue che $\quad \sum_j [\sup_{I_j}(f_1 - f_2) - \inf_{I_j}(f_1 - f_2)]\ l(I_j) \leq$

$$\sum_j [\sup_{I_j} f_1 - \inf_{I_j} f_2 - \inf_{I_j} f_1 + \sup_{I_j} f_2] l(I_j) = S(f_1; I_j) - s(f_1; I_j) + S(f_2; I_j) - s(f_2; I_j) \leq 2\epsilon$$

Corollario Se f é integrabile lo sono anche $f^+, f^-, |f|$. In particolare

$$I(f) = I(f^+) - I(f^-) \qquad I(|f|) = I(f^+) + I(f^-)$$

Infatti, se $f < 0$ in I_j, risulta $f^+ \equiv 0$ in I_j e quindi $\sup_{I_j} f^+ - \inf_{I_j} f^+ \leq \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f$. Altrimenti, ugualmente, $\quad \sup_{I_j} f^+ \leq \sup_{I_j} f, \quad \inf_{I_j} f^+ \geq \inf_{I_j} f \quad$ e quindi

$$\sup_{I_j} f^+ - \inf_{I_j} f^+ \leq \sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f \quad \text{e quindi} \quad S(f^+; I_j) - s(f^+; I_j) \leq S(f; I_j) - s(f; I_j)$$

e analogamente per f^-. Il Corollario é dunque conseguenza del Lemma 4.

Teorema di Riemann (le funzioni continue assolutamente integrabili sono integrabili) Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Se $\overline{I}(|f|) < +\infty$ allora f é integrabile.

Infatti, $f^+, f^-, |f|$ sono continue e $\overline{I}(f^+), \overline{I}(f^-) \leq \overline{I}(|f|) < \infty$ e quindi f^+ e f^- sono integrabili, e quindi lo é $f = f^+ - f^-$.

NOTA 6. Dalla Nota 3 segue che, se esiste $R > 0$ tale che f é continua in $[-R, R]$ e $f(x) = 0$ se $|x| \geq R$ e quindi $\overline{I}(|f|) \leq 2R \sup_{|x| \leq R} |f|$, allora f é integrabile, perché é discontinua (al piú) in $-R$ od R. Piú in generale, *una funzione che abbia solo discontinuitá isolate é integrabile se* $\overline{I}(|f|) < \infty$.

Teorema 1 (l'integrazione é una operazione lineare).

L'insieme delle funzioni integrabili su $\mathbf{R}$, dotato delle operazioni usuali, é uno spazio vettoriale su $\mathbf{R}$ e $I(f) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ é un funzionale lineare, cioé:

$$f, g \ \text{ integrabili}, \ a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow \quad af + bg \ \text{ é integrabile e } \ I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$$

Prova. Se $\alpha \geq 0$, da $(\alpha f)^+ = \alpha f^+, (\alpha f)^- = \alpha f^-$ e dal Lemma 3 segue che $I(\alpha f) = I((\alpha f)^+) - I((\alpha f)^-) = \alpha(I(f^+) - I(f^-)) = \alpha I(f)$. Poi, da $(-f)^+ = f^-, (-f)^- = f^+$ segue che $I(-f) = -I(f)$. Infine, se $\alpha < 0$, troviamo che $I(\alpha f) = I(-\alpha(-f)) = -\alpha[-I(f)] = \alpha I(f)$.
Circa la somma, da $f = f_1 - f_2$, $g = g_1 - g_2$, $f_i, g_i, i = 1, 2$ non negative ed integrabili, segue che $f + g = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2)$ é integrabile e, visto il Lemma 2, $I(f + g) = I(f_1 + g_1) - I(f_2 + g_2) = I(f_1) + I(g_1) - I(f_2) - I(g_2) = I(f) + I(g)$.

Teorema 2 (positivitá dell'integrale)

(i) f, g integrabili, $f \leq g \Rightarrow I(f) \leq I(g)$

(ii) f integrabile $\Rightarrow |f|$ integrabile e $|\int_{\mathbf{R}} f| \ \leq \ \int_{\mathbf{R}} |f|$

(i): $0 \leq g - f \Rightarrow 0 \leq I(g - f) = I(g) - I(f)$. (ii) $|f| = f^+ + f^- \Rightarrow |f|$ é integrabile e $|\int_{\mathbf{R}} f| = |\int_{\mathbf{R}} f^+ - \int_{\mathbf{R}} f^-| \leq \int_{\mathbf{R}} f^+ + \int_{\mathbf{R}} f^- = \int_{\mathbf{R}} |f|$.

NOTA 7. L'integrabilitá di $|f|$ non comporta (sfortunatamente!) l'integrabilitá di f (ad esempio, $f = \chi_{[0,1]\cap(\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q})} - \chi_{[0,1]\cap\mathbf{Q}}$. Qui f^+ ed f^- non sono integrabili!).

Integrale esteso a un insieme

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, A \subset \mathbf{R}$. Diremo che f é integrabile su A se $f\chi_A$ é integrabile e scriveremo

$$\int_A f \ := \int_{\mathbf{R}} f\chi_A$$

se f é solo definita in A, la intenderemo definita su tutto $\mathbf{R}$ con $f \equiv 0$ in A^c.

Proposizione 1. f integrabile $\Rightarrow f\chi_I$ é integrabile, e se f é integrabile in I e $J \subset I$, allora f é integrabile in J.

Basta provarlo per funzioni non negative. Sia I_j partizione di $\mathbf{R}$ tale che $S(f; I_j) - s(f; I_j) \leq \epsilon$. Tra gli I_j, ve ne sono al piú due, diciamo I_{j_1}, I_{j_2} che intersecano I

ma non sono contenuti in I. Dopo aver eventualmente raffinato la partizione I_j, possiamo supporre che $\quad l(I_{j_1}) \sup_{I_{j_1}} f \;+\; l(I_{j_2}) \sup_{I_{j_2}} f \leq \epsilon$. Otteniamo quindi

$$S(f\chi_I, I_j) - s(f\chi_I, I_j) \leq \sum_{I_j \subset I} l(I_j) \sup_{I_j} f - \sum_{I_j \subset I} l(I_j) \inf_{I_j} f + \epsilon \leq 2\epsilon$$

Infine, $f\chi_I$ integrabile $\Rightarrow f\chi_J = f\chi_I\,\chi_J$ é integrabile

Per quanto visto sopra, la classe delle funzioni integrabili su un insieme A é uno spazio vettoriale e l'operazione $f \to \int_A f$ é lineare e positiva.

Sia f integrabile, $I = [a,b], a < b, J = (a,b)$, oppure $J = [a,b)$ oppure $J = (a,b]$. É facile verificare che $\int_I f = \int_J f$.

Teorema 4 (additivitá dell'integrale). Sia f integrabile su A, B insiemi disgiunti. Allora

$$\int_{A\cup B} f \;=\; \int_A f \;+\; \int_B f$$

Infatti $\int_{A\cup B} f \;= \int_{\mathbf{R}} f\chi_{A\cup B} = \int_{\mathbf{R}} f(\chi_A + \chi_B) = \int_{\mathbf{R}} f\chi_A \;+\; \int_{\mathbf{R}} f\chi_B = \int_A f \;+\; \int_B f$.

Proposizione 2 . Sia f integrabile, I un intervallo. Allora

$$|\int_I f| \;\leq\; \sup_I |f|\; l(I)$$

Infatti $\sup_I |f|\, l(I) = S(|f|\chi_I; I, I^c)$.

Teorema della media . Sia I un intervallo chiuso e limitato. Siano f, g continue in I, $g(x) \geq 0 \;\; \forall x \in I$. Allora

$$\exists \xi \in I : \;\int_I fg \;=\; f(\xi) \int_I g$$

In particolare

$$\exists \xi \in I : \;\int_I f \;=\; f(\xi) l(I)$$

Dimostrazione. Ovviamente f e g, prolungate a zero fuori di I, sono integrabili, e quindi sono integrabili su I. Per il teorema di Weierstrass, f é dotata di minimo e di massimo su I, e si ha

$$(\min_I f) g(x)\chi_I(x) \leq f(x)g(x)\chi_I(x) \leq (\max_I f) g(x)\chi_I(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

Quindi, passando agli integrali ed usando la linearitá,

$$\min_I f \int_I g \leq \int_I fg \leq \max_I f \int_I g$$

Ora, possiamo supporre $\int_I g > 0$ (altrimenti non c'e niente da dimostrare) e concludere che $\frac{\int_I fg}{\int_I g} \in [\min_I f, \max_I f]$. La tesi segue allora dal Teorema del valore intermedio.

Basti poi osservare che, presa $g \equiv 1$, $\int_I g = l(I)$

INTEGRALI ORIENTATI

Sia $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, f una funzione integrabile. Scriveremo anche

$$\int_a^b f := \int_{\mathbf{R}} f\chi_{(a,b)}, \quad \int_b^a f := -\int_a^b f$$

Le proprietá viste finora per $I(f)$ si riscrivono in modo ovvio per gli integrali orientati. Notiamo ad esempio che $f \leq g, a > b \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Di fondamentale importanza é la seguente riformulazione della additivitá: se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é integrabile e $a, b, c \in [-\infty, +\infty]$ allora

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0$$

Infatti, se due tra a, b, c coincidono, tale relazione é vera per definizione. Altrimenti, uno dei tre é strettamente compreso tra gli altri due. Diciamo, per fissare le idee, che sia c ad essere compreso tra a e b. Detto $I(a, b)$ l'integrale (non orientato) di f esteso all'intervallo di estremi a e b, e definiti in modo analogo $I(b, c)$ e $I(c, a)$, per additivitá si ha $I(a, b) = I(b, c) + I(c, a)$. Dunque,

$$\int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = I(a,b)\frac{b-a}{|b-a|} + I(b,c)\frac{c-b}{|c-b|} + I(c,a)\frac{a-c}{|a-c|} =$$

$$= I(b,c)[\frac{b-a}{|b-a|} + \frac{c-b}{|c-b|}] + I(c,a)[\frac{b-a}{|b-a|} + \frac{a-c}{|a-c|}]$$

Ma, siccome c é compreso tra a e b, se $c > b$ allora $b < c < a$, mentre se $c < b$ deve essere $a < c < b$. In ogni caso $\frac{b-a}{|b-a|} + \frac{c-b}{|c-b|} = \frac{b-a}{|b-a|} + \frac{a-c}{|a-c|} = 0$.

Il Teorema Fondamentale del Calcolo-I. Sia $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt,\ x \in [a,b]$ ove f é limitata e integrabile in $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. Allora:

i) F é continua in $[a,b]$

ii) se f é continua in $x \in (a,b)$ allora F é derivabile in x e $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione. Usando l'additivitá dell'integrale, si ottiene

$$F(x+h) = F(x) + f(x)h + \int_x^{x+h} [f(t) - f(x)]dt$$

Siccome $|\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]dt| \leq\ 2|h| \sup |f| = O(h)$, F é continua in x.

Se f é continua in x, allora $|\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]dt| \leq |h| \sup_{\{t:|t-x|\leq|h|\}} |f(t)-f(x)| = \circ(|h|)$ e quindi F é derivabile in x con $F'(x) = f(x)$.

Si puó quindi scrivere

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

in ogni punto x in cui f é continua. Dunque

Corollario. Sia f continua in $[a,b]$. Allora f é dotata di primitiva in (a,b).

NOTA 9. Se φ é di classe C^1 ed f é continua, allora

$$\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt \ = \ f(\varphi(x))\varphi'(x)$$

Il Teorema Fondamentale del Calcolo-II .

Sia f continua in un intervallo aperto I. Sia P una primitiva di f in I. Allora

$$\int_a^b f \ = \ P\,|_a^b := [P(b) - P(a)] \qquad \forall\ [a,b] \subset I$$

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f$. Da $F' \equiv P'$ in I, segue che $F(x) - P(x) = F(a) - P(a) = -P(a)\ \forall x \in I$, e quindi $\int_a^b f \ = \ F(b) = P(b) - P(a)$.

Potremo quindi scrivere, per una funzione $f \in C^1([a,b])$,

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\,dx \ = \ f|_a^b$$

La formula di integrazione per parti . Siano $f, g \in C^1([a,b])$. Allora

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Dimostrazione. $\int_a^b fg' + f'g = \int_a^b (fg)' = fg|_a^b$.

La formula di cambiamento di variabile .

Sia $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$. Sia f continua in $[a,b] := \{\varphi(t) : t \in [\alpha,\beta]\}$. Allora

i) $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

Se di piú $\varphi'(t) > 0 \ \ \forall t \in [\alpha,\beta]$ e quindi $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ allora

ii) $\int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$

Dimostrazione. $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (\frac{d}{dt}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f\,|_\alpha^\beta = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f$.
Se di piú $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$, e quindi φ é invertibile in $[\alpha,\beta]$, posto $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, la formula i) si riscrive appunto come in ii)

APPENDICE.

1. Prova di $(*)$ (vedi Lemma 1).
Chiaramente $\sum_{j=1}^n l(I_j) \le l(I)\ \forall n \in \mathbf{N}$ e quindi $\sum_{j=1}^\infty l(I_j) \le l(I)$. Poi, sia $[a,b] \subset I$. Posto $I_j^\epsilon := (\inf I_j - \frac{\epsilon}{2^j}, \sup I_j + \frac{\epsilon}{2^j})$, si ha: $\quad [a,b] \subset \cup_{j=1}^\infty I_j^\epsilon \ \Rightarrow\ \exists\, N_\epsilon$ tale che $[a,b] \subset \cup_{j=1}^{N_\epsilon} I_j^\epsilon \ \Rightarrow\ b-a \le 2\epsilon + \sum_{j=1}^\infty l(I_j),\ \forall \epsilon > 0 \Rightarrow b-a \le \sum_j l(I_j),\ \forall [a,b] \subset I \Rightarrow l(I) \le \sum_j l(I_j)$.

2. ESEMPIO di I_j intervalli aperti limitati e disgiunti con $\chi_{\cup_{j=1}^\infty I_j}$ non integrabile.
Sia $1 = r_0 > r_1 \ldots > r_n \ldots, r_n \to r > 0$, $l_n = \frac{r_n}{2^n}$, $J_{1,1} := [0,1]$.
Sia $I_{1,1}$ l'intervallo aperto, centrato nel punto medio di $J_{1,1}$ e di lunghezza $l(I_{1,1}) = 1 - 2l_1$ (intervallo centrale). Siano $J_{2,1}, J_{2,2}$ gli intervalli ottenuti rimuovendo $I_{1,1}$ da $J_{1,1}$. Siano $I_{2,1}, I_{2,2}$ i corrispondenti intervalli centrali di lunghezza $l_1 - 2l_2$. Iterando, si costruiscono intervalli aperti $I_{n,j}, j = 1,\ldots,2^{n-1}$ di lunghezza $l_{n-1} - 2l_n$. Risulta $\sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^{2^{n-1}} (l_{n-1} - 2l_n) = \sum_{n=1}^\infty (r_{n-1} - r_n) = 1 - r$. Notiamo anche che l'aperto $O := \cup_{n=1}^\infty \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}$ é denso in $[0,1]$. Da ció segue che le somme superiori $\chi_{\cup_{n=1}^\infty \cup_{j=1}^{2^{n-1}} I_{n,j}}$ valgono almeno 1, mentre ogni somma inferiore vale al piú $1 - r$.

L'insieme $[0,1] \setminus O$ si chiama Cantor generalizzato (Cantor se $r_n = (\frac{2}{3})^n$).