AM120: Settimana 11

IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

Il Teorema Fondamentale del Calcolo 1.

Sia f é limitata e integrabile in $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. La funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

i) é definita e continua in $[a,b]$

ii) é derivabile in $x \in (a,b)$, se f é continua in x, ed in tal caso $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione. Usando l'additivitá dell'integrale, si ottiene

$$F(x+h) = F(x) + f(x)h + \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt$$

Siccome $|\int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt| \leq 2|h| \sup |f| = O(h)$, F é continua in x.

Se f é continua in x, allora $|\int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt| \leq |h| \sup_{\{t:|t-x|\leq|h|\}} |f(t) - f(x)| = \circ(|h|)$ e quindi F é derivabile in x con $F'(x) = f(x)$. Si puó quindi scrivere

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

in ogni punto x in cui f é continua.

Corollario. Sia f continua in $[a,b]$. Allora f é dotata di primitiva in (a,b).

NOTA . Se φ, ψ sono derivabili ed f é continua, allora

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

Basta infatti scrivere $\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt - \int_{x_0}^{\psi(x)} f(t)dt$ e $\int_{x_0}^{\varphi(x)} f(t)dt = F(\varphi(x))$ ed applicare la regola della catena.

TFC 2 (formula di Torricelli-Newton) .

Sia $f \in C(I), I$ intervallo aperto. Sia $P' = f$ in $[a, b] \subset I$. Allora

$$\int_a^b f \;=\; P\,|_a^b \;:=\; [P(b) - P(a)] \qquad \forall\ [a, b] \subset I$$

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f$. Da $F' \equiv P'$ in I, segue che $F(x) - P(x) = F(a) - P(a) = -P(a)\ \forall x \in I$, e quindi $\int_a^b f \;=\; F(b) = P(b) - P(a)$.

Potremo quindi scrivere, per una funzione $f \in C^1([a, b])$,

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\, dx \;=\; f|_a^b$$

Alcuni integrali immediati .

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \;=\; \arctan x \qquad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \;=\; \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x, \quad |x| < 1$

$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \;=\; \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in \mathbf{R}$

$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \;=\; \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad ,\forall\ x > 1$

La formula di integrazione per parti .

Siano $f, g \in C^1([a, b])$. Allora

$$\int_a^b f g' \;= f g|_a^b \;- \int_a^b f' g$$

Dimostrazione. $\int_a^b f g' \;+\; f' g \;=\; \int_a^b (f g)' \;=\; f g|_a^b$.

ESEMPI di integrazione per parti: $\int_0^x \sin^2 t\, dt \;=\; \int_0^x \cos^2 t\, dt \;-\; \cos x \sin x \Rightarrow$

$\int_0^x \sin^2 t\, dt \;=\; \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x), \qquad \int_0^x \cos^2 t\, dt \;=\; \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$

$\int_0^x \sinh^2 t\, dt \;=\; -\int_0^x \cosh^2 t\, dt \;+\; \cosh x \sinh x \Rightarrow$

$$\int_0^x \sinh^2 t\, dt = \tfrac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x), \qquad \int_0^x \cosh^2 t\, dt = \tfrac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$$

$$\int_1^x \log t\, dt = -\int_1^x dt + t \log t|_1^x = 1 - x + x \log x$$

$$\int_0^x \arctan t dt = -\int_0^x \tfrac{t}{1+t^2} dt + t \arctan t|_0^x = x \arctan x - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2)$$

La formula di cambiamento di variabile .

Sia $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$. Sia f continua in $[a,b] := \{\varphi(t) : t \in [\alpha,\beta]\}$. Allora

$$i) \qquad \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Se di piú $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$ e quindi $a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$ allora

$$ii) \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

Dimostrazione. $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta (\frac{d}{dt}\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f\ |_\alpha^\beta = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$

Se di piú $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$, e quindi φ é invertibile in $[\alpha,\beta]$, posto $a = \varphi(\alpha),\ b = \varphi(\beta)$, la formula i) si riscrive appunto come in ii)

ESEMPI di cambi di variabile

$$\int_0^x \sqrt{1-t^2}\, dt = (t := \sin s) \int_0^{\sin^{-1} x} \cos^2 s ds = \tfrac{1}{2}(\sin^{-1} x + x\sqrt{1-x^2})$$

$$\int_1^x \sqrt{t^2-1}\, dt = (t := \cosh s) \int_0^{\cosh^{-1} x} \sinh^2 s ds =$$

$$= \tfrac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \cosh^{-1} x) = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \log(x + \sqrt{x^2-1})]$$

$$\int_0^x \sqrt{t^2+1}\, dt = (t =: \sinh s) \int_0^{\sinh^{-1} x} \cosh^2 s ds = \tfrac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x) =$$

$$= \tfrac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \log(x + \sqrt{1+x^2})]$$

Simmetrie e cambi di variabile negli integrali

Funzioni pari, dispari. Sia f derivabile in $\mathbf{R}$. Si ha che

$$f \quad \text{pari} \quad \Rightarrow f'(-x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = -\lim_{h\to 0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} = -f'(x)$$

f dispari $\Rightarrow f'(-x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-x+h) - f(-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-f(x-h)+f(x)}{-h} = f'(x)$

cioé, se f é pari *(dispari)* allora f' é dispari *(pari)*. Usando il cambio di variabile $t = -s$, vediamo che vale anche il viceversa:

$f \in C(\mathbf{R})$ pari $\Rightarrow$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é dispari (ed é anche l'unica primitiva dispari!).
In paricolare, $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$
$f \in C(\mathbf{R})$ dispari $\Rightarrow$ $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é pari. In particolare, $\int_{-a}^{a} f = 0$.

Funzioni periodiche. Se f, derivabile in $\mathbf{R}$, é $T-$periodica (cioé $f(t+T) = f(t)\ \ \forall\, t$), allora f' é T-periodica:

$$f'(x+T) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

É naturale chiedersi se valga il viceversa. In effetti
Se $f \in C(\mathbf{R})$ é T-periodica, allora $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ é T-periodica se e solo se $\int_0^T f(t)\,dt = 0$ (le primitive di f sono T-periodiche se e solo se f é *a media nulla*).
Necessitá : $\int_0^T f(t)\,dt = F(T) - F(0) = 0.$ La sufficienza segue da

$\frac{d}{dx}\left[\int_0^{x+T} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt\right] = f(x+T) - f(x) \equiv 0$ e quindi

$$F(x+T) - F(x) = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t)\,dt$$

Usando il cambio di variabile, ne diamo una prova senza ipotesi di continuitá su f:

Posto $t = T + s$, risulta $\int_a^{a+T} f = \int_a^T f + \int_T^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^T f + \int_0^a f(T+s)\,ds = \int_0^T f \quad \forall a$ e quindi

$$\int_0^{x+T} f = \int_0^x f + \int_x^{x+T} f = \int_0^x f + \int_0^T f$$

Esercizio. Provare, usando il cambio di variabile $t := s + \frac{\pi}{2}$, che

$$\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$$

Estensione della Torricelli-Newton ad intervalli illimitati

Se $f \in C([a, +\infty))$ é non negativa, $F(x) := \int_a^x f$ é, per l'additivitá e positivitá dell'integrale, non decrescente, ed esiste quindi $F(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} F(x)$. Ovviamente $F(+\infty) = P(+\infty) - P(a)$ per ogni primitiva P di f in $[a, +\infty)$.

Ci chiediamo, in primo luogo, se la formula (TN) é ancora vera (qualora f sia integrabile...), ovvero se si ha $\int_a^{+\infty} f = P(+\infty) - P(a)$. Come vedremo, questo é vero (e, se $|f|$ é integrabile, sará quindi vero che $F(x) = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^-$ ha limite (finito) per x tendente all'infinito, e vale (TN)).

Ci chiediamo quindi, in secondo luogo, se l'esistenza di tale limite (finito) comporti l'integrabilitá di f su $[a, +\infty)$. La risposta a questa domanda sará si, se $f \geq 0$, ma negativa in generale. Premettiamo il seguente

Lemma. Sia f integrabile. Allora $\quad \int_x^{+\infty} |f| \to_{x \to +\infty} 0$

Prova. Sia I_j tale che $\sum_j (\sup_{I_j} |f|)\, l(I_j) < +\infty$. Eventualmente raffinando la partizione I_j, possiamo supporre che gli I_j siano limitati e che $I_j \cap [n, +\infty)$ sia una partizione di $[n, +\infty)$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Intanto, fissato $\epsilon > 0$, $\exists j_\epsilon$ tale che $\sum_{j \geq j_\epsilon} (\sup_{I_j} |f|)\, l(I_j) \leq \epsilon$. Sia $n > \sup I_j$, per $j = 1, \ldots, j_\epsilon$, e quindi $I_j \cap [n, +\infty) = \emptyset$ se $j = 1, \ldots, j_\epsilon$. Allora

$$\int_n^{+\infty} |f| \;\leq\; \sum_j (\sup_{I_j} f \chi_{[n,+\infty)})\, l(I_j) \;\leq\; \sum_{j \geq j_\epsilon} (\sup_{I_j} f)\, l(I_j) \leq \epsilon$$

Teorema 1. Sia $f \in C([a, +\infty))$. Allora

(i) $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x |f| < +\infty \quad \Rightarrow \quad f$ é integrabile in $[a, +\infty)$.

(ii) f integrabile in $[a, +\infty) \quad \Rightarrow \quad$ esiste $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$ (ma non viceversa!) e

$$\int_a^{+\infty} f \;=\; \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$$

Prova. (i) Come osservato, $x \to \int_a^x |f|$ é non decrescente e quindi esiste $\lim_{x \to +\infty} \int_a^x |f|$.
Da $\int_a^{+\infty} |f| = \int_a^x f + \int_x^{+\infty} |f|$ e dal Lemma 1 segue che $\int_a^{+\infty} |f| = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x |f|$.

Lo stesso argomento dice che $\int_a^x f^+$ e $\int_a^x f^-$ sono non decrescenti e $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x f^\pm = \int_a^{+\infty} f^\pm$ e quindi $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f = \lim_{x\to+\infty}(\int_a^x f^+ - \int_a^x f^-) = \int_a^{+\infty} f^+ - \int_a^{+\infty} f^- = \int_a^{+\infty} f$.

(ii) Sia I_j partizione. Mostriamo che $s(|f|\chi_{[a,+\infty)}, I_j) \le \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x |f|$. Si ha

$$s(|f|\chi_{[a,+\infty)}, I_j) \le \sum_{I_j\subset[a,+\infty)} \left(\inf_{I_j} |f|\right) l(I_j) \le \sum_{I_j\subset[a,+\infty)} \int_{I_j} |f|$$

Siccome $\sum\limits_{j=1}^n \int\limits_{I_j\cap[a,+\infty)} |f| = \int\limits_{\cup_{j=1}^n ([a,+\infty)\cap I_j)} |f| \le \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x |f| < +\infty$, deduciamo che $\underline{I}(|f|) < +\infty$, e dunque, come sappiamo, $|f|$ é integrabile, ed f é quindi integrabile.

Corollario 1. $f \in C([a,+\infty))$ é ivi integrabile $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \int_a^x |f| < +\infty$.

Corollario 2. Se $f \in C(\mathbf{R})$ é integrabile e $P' = f$ in $\mathbf{R}$, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = P(+\infty) - P(-\infty)$$

ESEMPI .

a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \lim_{x\to+\infty} \arctan t\,|_0^x = \frac{\pi}{2}$

b) $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha > 1$

c) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} = n! \qquad \int_0^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{1}{n}$

d) $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^{n+1}} = \frac{1\,3\,5\ldots(2n-1)}{2\,4\ldots 2n}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{2n+1}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{2n+1}})$

e) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Condizione di Cauchy per l'integrabilitá.

(i) $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon : \, x_\epsilon \le x_1 < x_2 \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} |f| \le \epsilon$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$ esiste finito $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists x_\epsilon : \, x_\epsilon \le x_1 < x_2 \Rightarrow |\int_{x_1}^{x_2} f| \le \epsilon$

Prova. (i) Per il Corollario 1, $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x |f| < +\infty$. La condizione di Cauchy perché esista finito questo limite, é che, indicata $\int_a^x \||f| = F(x)$, risulti $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} |f| \le \epsilon$ per $x_\epsilon \le x_1 \le x_2$.

(ii) Come in (i), con $F(x) := \int_a^x f$.

Teorema del Confronto.

(i) $\exists R \ge a :\ |f(x)| \le g(x) \ \ \forall x \ge R, \quad \int_a^{+\infty} g < +\infty \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} |f| < +\infty$

(ii) $\exists R \ge a :\ 0 \le g \le f \ \ \forall x \ge R, \quad \int_a^{+\infty} g = +\infty \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} f = +\infty$

Prova. (i) $\int_a^{+\infty} g < +\infty \ \Leftrightarrow \ \sup_{x\ge a} \int_a^x g < +\infty \ \Rightarrow \sup_{x\ge a} \int_a^x |f| < +\infty$ perché $|f(x)| \le g(x) \forall x \ge R \Rightarrow \int_a^x |f| = \int_a^R |f| + \int_R^x |f| \le \int_a^R |f| + \int_R^x g$ e quindi $\int_a^{+\infty} |f| < +\infty$.

(ii) Analogo: $\int_a^{+\infty} g = +\infty \ \Leftrightarrow \ \sup_{x\ge a} \int_a^x g = +\infty \ \Rightarrow \sup_{x\ge a} \int_a^x f = +\infty$ perché $f \le g$ per x grande e quindi $\int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Dal Teorema del confronto e dall'Esempio b), seguono subito

Corollario A.

(i) $\exists M, R > 0,\ \alpha > 1 :\ |f(x)| \le \frac{M}{x^\alpha} \ \ \forall\, x \ge R \ \Rightarrow \ f$ é integrabile in $[a, +\infty)$

(ii) $\exists M, R > 0 :\ |f(x)| \ge \frac{M}{x}, \ \ \forall\ x \ge R \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

Sia $f \in C([a, +\infty)$. Allora

(i) $\exists \alpha > 1 :\ x^\alpha |f(x)| \to_{x\to+\infty} c < +\infty \ \Rightarrow \ f$ integrabile in $[a, +\infty)$.

(ii) $x|f(x)| \to_{x\to+\infty} c > 0 \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} |f| = +\infty$

(i) Infatti, : $x^\alpha|f(x)| \to_{x\to+\infty} c < +\infty \quad \Rightarrow |f(x)| \le \frac{2c}{|x|^\alpha}$ per $x \ge x_c$. Siccome $\alpha > 1$, $f = f[\chi_{[x_c,+\infty)} + \chi_{[a,x_c]}]$ é integrabile in $[a,+\infty)$. Analogamente per (ii).

APPENDICE

INTEGRAZIONE PER PARTI: FORMULE ITERATIVE

1. Se $I_n(x) := \int\limits_0^x t^n e^t\, dt$, é $\quad I_n(x) = x^n e^x - nI_{n-1}(x)$

2. Se $I_n(x) := \int\limits_0^x t^n e^{-t}\, dt$, é $\quad I_n(x) = nI_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$

3. Se $S_n(x) := \int\limits_0^x \sin^n t\, dt$, $\quad C_n(x) := \int\limits_0^x \cos^n t\, dt$, é

$S_n(x) = (1-\frac{1}{n})S_{n-2}(x) - \frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x$, $\quad C_n(x) = (1-\frac{1}{n})C_{n-2} + \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x$

4. $S_{2n}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\dots(1-\frac{1}{2n}) \quad S_{2n+1}(\frac{\pi}{2}) = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\dots(1-\frac{1}{2n+1})$.

Da cui la formula di Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = [\frac{2\,4\,\dots 2n}{3\,5\dots(2n-1)}]^2 \frac{1}{2n+1} + O(\frac{1}{n})$$

5. Se $I_n(x) := \int\limits_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\, dt$, é $\quad I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$

6.Se $I_n(x) := \int\limits_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}}\, dt$, é $\quad I_n(x) = \frac{n-2}{n} I_{n-2} - \frac{t^{n-2}}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}$

Esecuzione dei calcoli:

1. $\int\limits_0^x t^n e^t dt = -n\int\limits_0^x t^{n-1}e^t + x^n e^x$, 2. $\int\limits_0^x t^n e^{-t} dt = n\int\limits_0^x t^{n-1}e^{-t} - x^n e^{-x}$

3. $\int\limits_0^x \sin^n t dt = \int\limits_0^x \sin^{n-1} t \sin t dt = (n-1)\int\limits_0^x \sin^{n-2} t\cos^2 t dt - \sin^{n-1} x \cos x$

$\Rightarrow n\int\limits_0^x \sin^n t dt = (n-1)\int\limits_0^x \sin^{n-2} t dt - \sin^{n-1} x\cos x$. 4.: da 3.

5. $\int\limits_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = -\int\limits_0^x t\frac{d}{dt}\frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \frac{t}{(1+t^2)^n}\Big|_0^x = 2n\int\limits_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \frac{x}{(1+x^2)^n} =$

$2n\int\limits_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \Rightarrow 2n\int\limits_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} dt = (2n-1)\int\limits_0^x \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{x}{(1+x^2)^n}$.

6. $I_n(x) = \int\limits_0^x t^{n-2} \frac{d}{dt}[\frac{1}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} dt = \frac{n-2}{n} \int\limits_0^x \frac{t^{n-3}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} dt - \frac{x^{n-2}}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}$.

Deduzione della Formula di Wallis. Sia $S_j := S_j(\frac{\pi}{2})$. Si ha

$S_{2n} = (1 - \frac{1}{2n}) S_{2n-2} = (1 - \frac{1}{2n})(1 - \frac{1}{2n-2}) S_{2n-4} =$

$(1 - \frac{1}{2n})(1 - \frac{1}{2n}) \ldots (1 - \frac{1}{4}) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, dt = (1 - \frac{1}{2n})(1 - \frac{1}{2n-2}) \ldots (1 - \frac{1}{2}) \frac{\pi}{2}$

$S_{2n+1} = (1 - \frac{1}{2n+1}) S_{2n-1} = (1 - \frac{1}{2n+1})(1 - \frac{1}{2n-1}) S_{2n-3} =$

$(1 - \frac{1}{2n+1})(1 - \frac{1}{2n-1}) \ldots (1 - \frac{1}{3}) \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = (1 - \frac{1}{2n+1})(1 - \frac{1}{2n-1}) \ldots (1 - \frac{1}{3})$.

Poi, $\sin x \leq 1 \Rightarrow S_{2n-1} \geq S_{2n} \geq S_{2n+1} \Rightarrow \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \geq \frac{S_{2n}}{S_{2n-1}} \geq 1$. Ma

$\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$, $\quad \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = \frac{3\,5\,...(2n-1)}{2\,4\,...2n} \frac{3\,5\,...(2n-1)(2n+1)}{2\,4\,...2n} \frac{\pi}{2}$ e quindi

$\frac{2n+1}{2n} \geq [\frac{3\,5\,...(2n-1)}{2\,4\,...2n}]^2 (2n+1) \frac{\pi}{2} \geq 1$ e quindi $\frac{\pi}{2}(2n+1)[\frac{3\,5\,...(2n-1)}{2\,4\,...2n}]^2 = 1 + O(\frac{1}{n})$

L'integrale di Gauss

Calcolo , mediante la formula di Wallis, della formula :

$$\textbf{(integrale di Gauss)} \qquad \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Cominciamo con la diseguaglianza elementare

$$(*) \qquad 1 - x \leq e^{-x} \leq \frac{1}{1+x}, \quad \forall x \geq 0$$

La diseguaglianza di sinistra, valida per $x = 0$, segue da $\frac{d}{dx}[e^{-x} - (1-x)] = -e^{-x} + 1 \geq 0, \quad \forall x \geq 0$. La diseguaglianza di destra, equivalente a $x - \log(1+x) \geq 0$, segue da

$$\frac{d}{dx}[x - \log(1+x)] = 1 - \frac{1}{1+x} \geq 0, \quad \forall x \geq 0.$$

Sostituendo x con x^2 in $(*)$, elevando alla n ed integrando, si ottiene

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Effettuando il cambio di variabile $x = \frac{t}{\sqrt{n}}$ in $\int\limits_0^{+\infty} e^{-nx^2}dx$, otteniamo

$$\sqrt{n}\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx \;\le\; \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \;\le\; \sqrt{n}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$$

Ricordiamo che $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} \;=\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\pi}{2n-1}} \;+\; \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Inoltre, effettuando il cambio di variabile $x = \cos t$, otteniamo

$$\int\limits_0^1 (1-x^2)^n dx \;=\; \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\, dt \;=\; \frac{2\,\dots 2n}{3\,\dots (2n+1)} \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} \;+\; \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

ove l'ultima uguaglianza segue dalla formula di Wallis. Riassumendo:

$$\sqrt{\frac{n\pi}{2(2n+1)}} \;+\; \circ(1) \;\le\; \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2}dt \;\le\; \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n\pi}{2n+1}} \;+\; \circ(1)$$

Passando al limite per n tendente all'infinito si ottiene $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx \;=\; \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Formula di Taylor con il resto in forma integrale

Concludiamo con una estensione del Teorema del valor medio in forma integrale, fornita dal Teorema Fondamentale del Calcolo: se $\varphi \in C^1([0,1]), \varphi(1) = \varphi(0) + \int\limits_0^1 \varphi'(t)dt = \varphi(0) + \varphi'(p.i.)$.

Sia $\varphi \in C^\infty([0,1])$. Allora, per ogni naturale n, si ha

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt \quad (*)_n$$

Dimostrazione. Infatti, $\varphi(1) = \varphi(0) + \int\limits_0^1 \varphi'(t)dt$: $(*)_1$ é vera.

Supponiamo $(*)_n$ vera. Mediante una integrazione per parti, otteniamo

$$\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt = -\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^1 -\frac{(1-t)^n}{n}\varphi^{(n+1)}(t)dt - \frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n)}(t)|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n!}\int\limits_0^1 (1-t)^n\varphi^{(n+1)}(t)dt + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$

Segue allora che $(*)_{n+1}$ é vera.