AM120: Settimana 12

INTEGRABILITÁ IN SENSO GENERALIZZATO
INTEGRALI IMPROPRI

Abbiamo visto che se f, continnua, é integrabile, allora $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ esiste ed é finito ed é uguale a $\int_a^\infty f$. Di converso, senza ipotesi di integrabilitá su f, $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ non esisterá, in generale (ad es., $f(x)=\sin x$). Infatti il limite per x tendente all'infinito di $\int_a^x f = \int_a^x f^+ - \int_a^x f^-$ sará infinito o potrá non esistere affatto se una o entrambe le funzioni $\int_a^x f^+$, $\int_a^x f^-$ divergono per x tendente all'infinito.

Puó tuttavia accadere, pur se f non é integrabile, che $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ esista ugualmente. Tale circostanza é oggetto della

Definizione . Se $\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$ esiste finito f si dice integrabile in senso improprio (o in senso generalizzato) e

$$\int_a^{+\infty} f := \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f$$

é l'integrale improprio (o in senso generalizzato) di f su $[a,+\infty)$ (abuso di linguaggio: f potrebbe non essere integrabile in $[a,+\infty)$!)

Integrabilitá e integrabilitá impropria. Dal Teorema 1 segue:

$f\geq 0$, allora f é integrabile $\Leftrightarrow$ f é integrabile in senso generalizzato

f integrabile $\Rightarrow$ f integrabile in senso improprio (ma non viceversa!)

Il fatto che l'integrabilitá in senso generalizzato non implichi l'integrabilitá é illustrato dai seguenti

CONTROESEMPIO 1. $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\chi_{[n-1,n)}(x)$

(funzione che vale $\frac{(-1)^n}{n}$ in $[n-1,n)$ e zero in $(-\infty,0)$).

(i) $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f = \sum_1^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

(ii) f non é integrabile su $[0,+\infty)$, perché $\int\limits_0^{+\infty} |f| = +\infty$

Verifica di (i):

$$\int\limits_0^x f = \int\limits_0^{[x]} f + \int\limits_{[x]}^x f = \sum_{n=1}^{[x]} \frac{(-1)^n}{n} + \circ(1)$$

$(|\int\limits_{[x]}^x f| \leq \frac{1}{1+[x]} \to_{x\to+\infty} 0!)$ e quindi

$$\int\limits_0^x f \to_{x\to+\infty} \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Verifica di (ii): $|f| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\chi_{[n-1,n]}$, e quindi $\underline{I}(|f|) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} = +\infty$.

CONTROESEMPIO 2. $f(x) := \frac{\sin x}{x}\chi_{(0,+\infty)}$

é integrabile in senso generalzzato ma non é integrabile:

(i) $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt = +\infty$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt$ esiste finito.

Prova di (i). Sia $I := \{x \in [0,\pi] : \sin x \geq \frac{1}{2}\}$, $I_n := I + (n-1)\pi$. É

$l(I_n) = l(I) > 0 \quad \forall n \in \mathbf{N}$ e $|\frac{\sin x}{x}| \geq \frac{1}{2n\pi}$, $\forall x \in I_n$. Dunque, per ogni n,

$$\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\sin t}{t}|\, dt \geq \int\limits_1^{n\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j\pi}\chi_{I_j}(t) dt \geq l(I) \sum_{j=1}^n \frac{1}{2j\pi} \to_n +\infty$$

Prova di (ii).

$$\int\limits_1^x \frac{\sin t}{t}\, dt = -\int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt - \frac{\cos t}{t}\Big|_1^x \to -\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt + \cos 1.$$

Infatti $\int\limits_1^{+\infty} |\frac{\cos t}{t^2}|\, dt < +\infty$ perché $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ e $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} < +\infty$ e quindi esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \int\limits_1^x \frac{\cos t}{t^2}\, dt = \int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$$

INTEGRALI IMPROPRI PER FUNZIONI NON LIMITATE

f, integrabile in $[a, b-\delta]$ per ogni δ piccolo, si dice integrabile in senso improprio (o in senso generalizzato) in $[a, b]$ se

$$\lim_{x\to b^-}\int_a^x f \quad \text{esiste finito, e} \qquad \int_a^b f := \lim_{x\to b^-}\int_a^x f$$

é l'integrale improprio (o in senso generalizzato) di f su $[a, b]$

ESEMPI .

a) $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$

b) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi.$ Infatti, $\int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int_{\sqrt{\delta}}^{\sqrt{R}} \frac{2dt}{(1+t^2)} =$
$2(\arctan\sqrt{\delta} - \arctan\sqrt{R}) \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} := \lim_{\delta\to 0}(\lim_{R\to+\infty}\int_\delta^R \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}) = \pi.$

c) $f_\alpha(x) = \frac{\sin(\log^2 t)}{t^\alpha}dx$ é
assolutamente integrabile se $\alpha < 1$, integrabile se $\alpha = 1$, e $\int_0^1 |f_\alpha| = +\infty$ se $\alpha \geq 1$.
Infatti, effettuando il cambio $\log^2 t = x$, l'integrale (su $[\epsilon, 1]$) diventa $\int_0^{\log^2\epsilon} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} e^{(\alpha-1)\sqrt{x}}dx.$ Se $\alpha < 1$, il decadimento esponenziale assicura assoluta integrabilitá. Se $\alpha = 1$, si vede che il limite, per ϵ che va a zero, esiste finito, mentre $\int_0^\infty |\frac{\sin x}{\sqrt{x}}|dx = +\infty$ (argomentare come per $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx$). A maggior ragione, $\int_0^1 |f_\alpha| = +\infty$ se $\alpha > 1$.

Proposizione (condizione di Cauchy).

(i) $\int_a^b |f| < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon : \ b-\delta \leq x_1 < x_2 < b \Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} |f| \leq \epsilon$

(ii) $\int_a^b f$ esiste $\Leftrightarrow \quad \forall\epsilon > 0, \exists\delta_\epsilon : \ b-\delta \leq x_1 < x_2 < b \Rightarrow |\int_{x_1}^{x_2} f| \leq \epsilon$

Dimostrazione. (i) É la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente a b da sinistra, di $F(x) := \int_a^x |f|$ giacché $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} |f|$.

(ii) Come in (i)

Teorema del Confronto.

(i) $\exists\delta > 0 : \ |f(x)| \ \le g(x) \ \ \forall x \in [b-\delta, b), \ \int_a^b g \ < \ +\infty \ \ \Rightarrow \ \int_a^b |f| \ < \ +\infty$

(ii) $\exists\delta > 0 : \ \ f(x) \ \ge g(x) \ge 0 \ \ \forall x \in [b-\delta, b), \ \int_a^b g \ = \ +\infty \ \ \Rightarrow \ \int_a^b |f| \ = \ +\infty$

Corollario A. Sia f integrabile in $[a, x], \ \ \forall x < b$.

(i) $\exists M, \delta > 0, \ \alpha < 1 : \ |f(x)| \le \frac{M}{|x-b|^\alpha} \ \ \forall\, x \in [b-\delta, b) \ \Rightarrow \ f$ é integrabile in $[a, b]$

(ii) $\exists M, \delta > 0, \ : \ \ |f(x)| \ge \frac{M}{|x-b|} \ \ \forall\, x \in [b-\delta, b) \ \Rightarrow \ \int_a^b |f| \ = \ +\infty$

Corollario B: integrabilitá e comportamento asintotico.

(i) $\ \exists\alpha < 1 : \ \ |x-b|^\alpha |f(x)| \to_{x\to+\infty} \ c \ < \ +\infty \ \ \Rightarrow \ f$ integrabile

(ii) : $\ |(x-b)\, f(x)| \to_{x\to+\infty} \ c \ > \ 0 \ \ \Rightarrow \ \int_a^{+\infty} |f| \ = \ +\infty$

INTEGRALI E SERIE

Dalla additivitá dell'integrale:

$$\int_1^{+\infty} |f| \ = \ \lim_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} |f| \ = \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_j^{j+1} |f| \ = \ \sum_{j=1}^{\infty} \int_j^{j+1} |f|$$

cioé f é integrabile su $[1, +\infty)$ se e solo se la serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} |f|$ converge, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} |f| \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} |f|$$

Analogamente, f é integrabile in senso generalizzato su $[1, +\infty)$ se e solo se la serie $\sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f$ converge, e in tal caso

$$\int_1^{+\infty} f \ = \ \sum_{j=1}^{+\infty} \int_j^{j+1} f$$

Il caso di funzioni non negative e decrescenti

In questo paragrafo f é una funzione nonnegativa e non crescente in $[1, +\infty)$. Per una tale funzione si ha che $f(j+1) \leq \int_j^{j+1} f \leq f(j), \quad \forall j \in \mathbf{N}$ e quindi

$$\sum_j f(j) < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{+\infty} f < +\infty$$

ESEMPI

1. Sia $f(x) = \frac{1}{x^r}$. Siccome $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r} dx < +\infty$ se e solo se $r > 1$ la serie (armonica generalizzata) $\sum_n \frac{1}{n^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

2. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log x)^r} < +\infty$ se e solo se $r > 1$, e quindi la serie $\sum_n \frac{1}{n(\log n)^r}$ converge se e solo se $r > 1$.

La diseguaglianza $f(j+1) \leq \int_j^{j+1} f \leq f(j), \quad \forall j \in \mathbf{N}$ implica che la serie $\sum_1^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right)$ é a termini positivi e converge. Infatti il suo resto $n-$esimo $\sum_{j=n+1}^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right) \leq \sum_{j=n+1}^{+\infty} [f(j) - f(j+1)] = f(n+1) - f(\infty) = \circ(1)$.
A partire dalla scrittura

$$f(1) + \ldots + f(n) = \sum_{j=1}^{n} \left(f(j) - \int_j^{j+1} f \right) + \int_1^{n+1} f(x) dx$$

si ottiene allora l'espansione

$$f(1) + \ldots + f(n) = \int_1^{n+1} f(x) dx + \sum_1^{+\infty} \left(f(n) - \int_n^{n+1} f \right) + O(f(n+1) - f(\infty))$$

Tale formula puó essere utilizzata per stimare:

I) la rapiditá con cui diverge la somma parziale di una serie divergente
II) la rapiditá con cui converge a zero il resto n-esimo di una serie convergente.

ESEMPI di I)

1. $\exists \gamma > 0 : \quad 1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n} \ = \ \log(n+1) \ + \gamma \ + \ O(\frac{1}{n})$

($\gamma \ := \ \sum\limits_1^{+\infty} (\frac{1}{n} \ - \ \log \frac{n+1}{n}) \ < \ +\infty$ si chiama costante di Eulero-Mascheroni)

2. $\exists c > 0 : \quad \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{n \log n} \ = \ \log[\log(n+1)] \ + \ c \ + \ \circ(1).$

3. $\exists b > 0 : \quad n! \ = \ \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} \ (b + O(\frac{1}{n}))$

($\log b \ := \ 1 + \frac{1}{2}\gamma - \sum\limits_1^{+\infty} n \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^2}{(n+t)^3}$. Si puó provare che $b = \sqrt{2\pi}$: formula di Stirling)

1. Sia $f(x) = \frac{1}{x}$, cosicché $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \ = \ f(1) + \dots + f(n) \ = \ \int\limits_1^{n+1} \frac{dx}{x} + \gamma + O(\frac{1}{n}) \ = \log(n+1) + r + O(\frac{1}{n})$.

2. Analogo ad 1., con $f(x) = \frac{1}{x \log x}$.

3. $\log n! = \log 2 + \dots + \log n \ = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\log(j+1) - \int\limits_j^{j+1} \log t dt \right) + \int\limits_1^n \log t dt =$

$$= f(1) + \dots + f(n-1) \ + \ n \log n \ - n \ + \ 1$$

ove $f(x) \ := \ \log(x+1) \ - \ \int\limits_x^{x+1} \log t dt \ = \ 1 \ - \ x \log(1 + \frac{1}{x}) > 0, \forall x > 0$. E quindi

$$n! = e^{[1 + f(1) + \dots + f(n-1)]} \quad \frac{n^n}{e^n}$$

La tesi seguirá dai seguenti fatti

(i) f é decrescente a zero

(ii) $\psi(x) := f(x) - \frac{1}{2x} = O(\frac{1}{x^2})$ per $x \to +\infty$.

Infatti, allora, $f(1) + \dots + f(n-1) =$

$$= \int\limits_1^n [\frac{1}{2x} + \psi(x)]dx + \sum\limits_1^{+\infty} \left(f(n) - \int\limits_n^{n+1} f \right) + O(f(n)) = \log \sqrt{n} \ + \ c \ + \ O(\frac{1}{n})$$

ove $c = \int\limits_1^{\infty} \psi(x)dx + \sum\limits_1^{+\infty} \left(f(n) - \int\limits_n^{n+1} f \right)$. Dunque

$$n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n} e^{c+1} (1 + O(\frac{1}{n}))$$

Prova di (i). Dire che $1 - x\log(1+\frac{1}{x})$ decresce a zero in $[1, +\infty)$ equivale a dire che $x\log(1+\frac{1}{x})$ cresce a 1, ovvero che, posto $s = \frac{1}{x}$, $\frac{\log(1+s)}{s}$ decresce in $[0,1]$, ovvero la sua derivata é negativa in $[0,1]$, ovvero $\frac{1}{s(1+s)} \leq \frac{\log(1+s)}{s^2}$ $\forall s \in\in [0,1]$.
Siccome $\frac{\log(1+s)}{s} \geq \frac{1}{1+s}$ in $s = 0$ e $(\log(1+s))' = \frac{1}{1+s} \geq \frac{1}{1+s} - \frac{s}{(1+s)^2} = (\frac{s}{1+s})'$, concludiamo che $\frac{\log(1+s)}{s} \geq \frac{1}{1+s}$ per ogni $s \in [0,1]$ e quindi f decresce a zero quando $x \to +\infty$.
Prova di (ii). Usando lo sviluppo di Taylor per $\log(1+s)$ attorno a $s = 0$, troviamo

$$1 - \frac{\log(1+s)}{s} - \frac{s}{2} = 1 - \frac{1}{s}[s - \frac{s^2}{2} - s\psi(s)] - \frac{s}{2} = \psi(s)$$

ove $\psi(s) = O(s^2)$. Ponendo $s = \frac{1}{x}$, troviamo appunto

$$f(x) - \frac{1}{2x} := 1 - x\log(1+\frac{1}{x}) - \frac{1}{2x} = \psi(\frac{1}{x}), \qquad \psi(\frac{1}{x}) = O(\frac{1}{x^2})$$

NOTA La formula di Taylor con il resto in forma integrale per $\log(1+s)$

$$\log(1+s) \ = \ s - \frac{s^2}{2} + \ s^3 \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(1+st)^3}\, dt$$

dá, ponendo $s = \frac{1}{x}$,

$$\psi(x) = f(x) - \frac{1}{2x} = x \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{(x+t)^3}$$

Esempio di II) Sia f integrabile. Da $f(j+1) \leq \int_j^{j+1} f \leq f(j)$, $\forall j \in \mathbf{N}$ segue $0 \leq [\sum_{j \geq n} f(j)] - \int_n^{+\infty} f \leq f(n)$. Se accade che $f(n) = \circ(\int_n^{+\infty} f)$ per n tendente all'infinito, allora

$$\sum_{j \geq n} f(j) \ = \ \int_n^{+\infty} f \ + \ \circ(\int_n^{+\infty} f)$$

ESEMPIO. Sia $r > 1$. Allora $\sum_{j \geq n} \frac{1}{j^r} \ = \ \frac{1}{(r-1)n^{r-1}} \ + \ \circ(\frac{1}{n^{r-1}})$.