AM120 2010-2011: APPELLO B

TEMA 1.

Enunciare e dimostrare le regole di De l'Hopital.

TEMA 2. Siano $E \subset \mathbf{R}$, $f_n : E \to \mathbf{R}$. Provare che

$$(i) \quad 0 \le f_{n+1}(x) \le f_n(x) \ \forall x \in E, \ n \in \mathbf{N} \qquad (ii) \ \sup_{x \in E} f_n(x) \to_{n \to +\infty} 0 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x) \text{ converge uniformemente in } E$$

TEMA 3. Sia $f \in C^2(\mathbf{R})$.

Provare che f é convessa solo e solo se $f''(x) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

TEMA 4. Sia $f \in C(\mathbf{R})$.

Provare che f é integrabile se e solo se $|f|$ lo é. Dedurre che f é integrabile se e solo se esiste finito il $\lim\limits_{M \to +\infty} \int\limits_{-M}^{M} |f|$.

Dare la definizione di integrale in senso improprio su $\mathbf{R}$ e mostrare che se una funzione é integrabile lo é anche in senso improprio ed integrale ed integrale in senso improprio coincidono.

Mostrare poi che l'integrabilitá in senso improprio non garantisce l'integrabilitá.

Mostrare infine che la condizione *esiste finito il* $\lim\limits_{M \to +\infty} \int\limits_{-M}^{M} f$ non assicura l'integrabilitá, neppure in senso improprio.

TEMA 5. Usando il confronto tra integrali e serie, provare che

$$\exists C > 0 \qquad \text{tale che} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \log n + C + \circ(1)$$

.

ESERCIZIO 1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ derivabile.

Mostrare che se f é dispari allora f' é pari. É vero il viceversa?
Mostrare che se f é pari allora f' é dispari. É vero il viceversa?
Mostrare che se f é T-periodica allora f' é T-periodica. É vero il viceversa?

ESERCIZIO 2. Studiare la convergenza puntuale, uniforme, totale, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

ESERCIZIO 3. Calcolare

$$\frac{d}{dt} \int_0^{t \sin t} e^{-x^2} dx$$

Studiare poi la funzione $F(x) := \int_0^{t \sin t} e^{-x^2} dx$.

ESERCIZIO 4. Calcolare, usando opportuni cambi di variabile, i seguenti integrali

$$I_r = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx, \qquad J_r = \int_{-r}^{r} \sqrt{\frac{r-x}{r+x}} dx$$

Calcolare, integrando per parti, i seguenti integrali

$$\int_0^r \arctan x dx, \qquad g(x) = \int_{-r}^{r} x \arctan x dx$$

ESERCIZIO 5. Dire, motivandolo, se le funzioni

$$f_n(r) := r e^{\frac{\log^2 r}{n}}, \qquad g_n(r) := r^2 e^{\frac{\log^2 r}{n}}$$

sono integrabili/ integrabili in senso improprio in $(0, 1]$ per qualche $n \in \mathbf{N}$. Calcolare poi, effettuando i cambi di variabile $s = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}}[\frac{\alpha}{2} + \log r]$, $\quad s = -\sqrt{\frac{2}{\alpha}}[\frac{3}{4}\alpha + \log r]$,

$$I_n = \int_{e^{-n}}^{1} f_n(r) \chi_{[e^{-n},1]} dr, \qquad J_n = \int_{e^{-n}}^{1} g_n(r) \chi_{[e^{-n},1]} dr$$

Calcolare infine, se esistono, $\lim_{n\to\infty} I_n$, $\lim_{n\to\infty} J_n$. Interpretare i risultati in termini di 'passaggio al limite sotto segno di integrale'.