AM120 2010-2011: RECUPERO II ESONERO

TEMA 1. Sia f analitica in $(0,+\infty)$. Provare che

$$f(x) = 1 \quad \forall x \in (0,1) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 1 \quad \forall x > 0$$

TEMA 2. Sia F derivabile in (a,b), $\quad f := F'$ in (a,b). Provare che

$\forall x', x'' \in (a,b), \quad \forall t \in [0,1] \quad \exists s \in [0,1]:$

$$f(sx' + (1-s)f(x'')) \;=\; tf(x') + (1-t)f(x'') \qquad (*)$$

Mostrare con un esempio che $(*)$ non é sufficente perché f ammetta primitiva in (a,b).
Se f é anche monotona, $(*)$ diventa sufficente a garantire che f abbia primitiva in (a,b)?

TEMA 3.

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Dare la definizione di integrabilitá e di integrale per f e mostrare che f é integrabile se e solo se lo sono la parte positiva f^+ e la parte negativa f^- di f e che $\int\limits_{\mathbf{R}} f = \int\limits_{\mathbf{R}} f^+ - \int\limits_{\mathbf{R}} f^-$.
Dedurre che $f \in C(\mathbf{R})$ é integrabile se e solo se $|f|$ é integrabile. É vera questa affermazione se f non é continua?

Provare poi che la somma di due funzioni integrabili é integrabile e che l'integrale della somma é la somma degli integrali.

TEMA 4.

Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ integrabile. Sia $F(x) := \int\limits_0^x f$. Provare che

(i) F é continua

(ii) se f é continua in x_0 allora F é derivabile in x_0 e $F'(x_0) = f(x_0)$.

TEMA 5.

Usando il confronto tra integrali e serie, provare che

$$\exists b > 0 \qquad \text{tale che} \qquad n! \;=\; \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n}\,(b + O(\frac{1}{n}))$$

ESERCIZIO 1.

Determinare, laddove esistono, le primitive delle seguenti funzioni

$$g_1(x) = \cosh^2 x, \qquad g_2(x) = \sqrt{x^2-1} \qquad g_3(x) = \frac{x^2}{(x^2-1)^2}$$

ESERCIZIO 2.

Sia $t > 0$. Dire, motivandolo, se esistono i seguenti integrali

$$I_1 = \int_t^{2t} \sqrt{\frac{x+t}{x-t}}dx, \qquad I_2 = \int_t^{+\infty} \sqrt{\frac{x+t}{x-t}} \cos^2 x dx \qquad I_3 = \int_t^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+t^2)^2} dx$$

ed eventualmente calcolarli.

ESERCIZIO 3.

Sia $f \in C(\mathbf{R})$ integrabile e dispari. Effettuare il cambio di variabile $x = -t$ per stabilire quale delle seguenti affermazioni é sicuramente vera:

$$(i) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)dx \qquad (ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0$$

ESERCIZIO 4.

Dire, motivando, se le seguenti funzioni sono integrabili/integrabili in senso improprio su $(-\infty, +\infty)$:

$$k(x) = \sqrt[3]{x} \cos x^4, \qquad h(x) = \frac{\arcsin(\sin x)}{x}$$

ESERCIZIO 5. Sia

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (\pi - 2\arctan n) x^n \qquad |x| < 1$$

Dire perché f é dotata di primitiva e calcolarne la primitiva che si annulla in $x = 0$. Dedurre che f é integrabile (in senso improprio) in $[0, 1]$.