Am120 – Tutorato I

Derivate

Venerdì 4 Marzo 2011

Filippo Cavallari e Vincenzo Morinelli

Esercizio 1 Calcolare, usando la definizione, le derivate di:

(1) $\frac{1}{x}$ (2) $\sqrt{x}$ (3) $\tan x$ (4) $\cos\left(x^n\right)$

Esercizio 2 Siano *f(x)*, *g(x)* e *h(x)* tre funzioni derivabili in x_0. Calcolare $\left(fgh\right)'\left(x_0\right)$.

Esercizio 3 Calcolare le seguenti derivate utilizzando soltanto le derivate delle funzioni elementari e le opportune regole di derivazione:

(1) $\ln x$ (2) $x^r \quad r \in \mathbb{R}$ (3) $\arccos x$ (4) $\tan x$

(5) $\arctan x$ (6) $\sin\left(3x^3 + 4^x\right)$ (7) $e^x\left(1 + x^2 + 3x^7\right)$ (8) 7^{x^2+4}

(9) $\sin\left(\pi^{\tan x}\right)$ (10) $x \cdot \ln x \cdot \sin x$ (11) $e^{\sin\left(e^x\right)}$ (12) $\frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$

(13) $\left(\frac{x+1}{x+3}\right)e^{-\cos x}$ (14) $\ln\left(x + \sin\left(\ln x\right)\right)$ (15) $e^{x^2+1}\ln\left(x^2+1\right)$ (16) $\frac{\sin^2 x + \cos x}{\ln x}$

(17) $\sin\left(\frac{\ln x}{x^3+4}\right)$ (18) $\ln^2\left(\arcsin x\right)$ (19) $\frac{\arctan\left(x^5 + x^\pi\right)}{\ln\left(2^x\right)}$ (20) $\sin\left(30x^3 - x^7\right)e^{\tan x}$

(21) $x|x|$ (22) $|x|\sin\left|x^2+1\right|$ (23) $\left(\frac{2|x|}{\left(1+x^2\right)^2}\right)^\alpha$ (24) $\left|x^3-1\right|e^{\frac{1}{|x|^3+\ln x}}$

Esercizio 4 Dire per quale valori dei parametri le seguenti funzioni sono continue e derivabili:

(1) $f\left(x\right) = \begin{cases} ax^2 + bx + 3 & x \geq 0 \\ 7e^x - 4 & x < 0 \end{cases}$

(2) $f\left(x\right) = \begin{cases} \dfrac{4a+b}{x^2+1} & x \geq 1 \\ x^2 + 2x\left(a+b\right) - 1 & x < 1 \end{cases}$

Esercizio 5 Dimostrare che:

(1) $\frac{d^n}{dx^n}x^\alpha = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ (2) $\frac{d^n}{dx^n}\sin x = \sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$

(3) $\frac{d^n}{dx^n}\cos x = \cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$ (4) $\frac{d^n}{dx^n}\frac{ax+b}{cx+d} = (-1)^{n-1}c^{n-1}n!\frac{ad-bc}{(cx+d)^{n+1}}$ $ad-bc \neq 0$

Esercizio 6 Definiamo le funzioni *seno iperbolico* e *coseno iperbolico* nel modo seguente:

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad\qquad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

a. provare a disegnare il grafico di entrambe le funzioni cercando di individuare eventuali simmetrie (in particolare dire se sono pari e/o dispari)
b. verificare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
c. calcolare la derivata del seno e del coseno iperbolico
d. indicate le loro funzioni inverse rispettivamente con $\sinh^{-1} x$ (*arcoseno iperbolico*) e $\cosh^{-1} x$ (*arcocoseno iperbolico*), calcolare le loro derivate
e. dimostrare che
    i. $\sinh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$
    ii. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$
f. definita $\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$, calcolarne la derivata
g. calcolare le seguenti derivate:

(1) $\sinh(\cosh(\sinh x))$ (2) $\sinh\left(\frac{x^3+x^2+x+1}{7^x}\right)$ (3) $e^{\sinh(\arctan x)}$

Esercizio 7 Sia data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^\alpha \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Dire per quali α la funzione è continua, derivabile e ha derivata continua.

Esercizio 8 Sia α un numero irrazionale tale che esiste $c>0$ per cui per ogni numero razionale p/q, con p e q interi coprimi e $q>0$, risulta

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^2}$$

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1/q^3 & x = p/q \quad p,q \in \mathbb{Z} \quad q>0 \end{cases}$$

mostrare che f è derivabile in α.