Am120 – Tutorato II

Derivate, disuguaglianze e teorema di De L'Hôpital

Lunedì 14 Marzo 2011

Filippo Cavallari e Vincenzo Morinelli

Esercizio 1 Mostrare un esempio per ognuno dei seguenti quesiti:

- una funzione continua ma non derivabile in un punto
- una funzione derivabile in un punto la cui derivata non è derivabile in quel punto
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto esiste ma non è finito
- una funzione il cui limite del rapporto incrementale in un punto non esiste

Esercizio 2 Fissato $\alpha > 1$ sia f definita $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha}$ $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Dimostrare che *f* è costante.

Esercizio 3 Dati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ con $\beta > 0$ definiamo nell'intervallo $[-1,1]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin\left(\dfrac{1}{x^{\beta}}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Provare che:

(1) f è continua se e solo se $\alpha > 0$

(2) $f'(0)$ esiste se e solo se $\alpha > 1$

(3) f' è limitata se e solo se $\alpha \geq 1 + \beta$

(4) f' è continua se e solo se $\alpha > 1 + \beta$

(5) $f''(0)$ esiste se e solo se $\alpha > 2 + \beta$

(6) f'' è limitata se e solo se $\alpha \geq 2 + 2\beta$

(7) f'' è continua se e solo se $\alpha > 2 + 2\beta$

Esercizio 4 (Formula di Leibniz) Dimostrare che se f e g sono due funzioni definite nell'intervallo $I = [a;b]$ che hanno tutte le derivate fino all'ordine k continue in I allora per ogni $x \in I$, $n \leq k$ si ha

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg)(x) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{d^i}{dx^i} f(x) \frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}} g(x)$$

con la convenzione $\dfrac{d^0}{dx^0} f(x) = f(x)$.

(Suggerimento: sarà utile ricordare che $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i}$ *...)*

Esercizio 5 Data la funzione

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

dimostrare che $\frac{d^n}{dx^n}f(0)=0$.

Esercizio 6 Dimostrare le seguenti disuguaglianze:

(1) $x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x \quad \forall x>0$

(2) $\cos x>1-\frac{x^2}{2} \quad \forall x\neq 0$

Esercizio 7 Dimostrare che se $x,y\geq 0 \quad p,q>1 \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ allora $xy\leq \frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$

(Suggerimento: considerare la funzione $f(x)=xy-\frac{x^p}{p}\ldots$*)*

Esercizio 8 Dimostrare che se $x,y\geq 0$ e $p>1$ allora $x^p+y^p\leq (x+y)^p\leq 2^{p-1}\left(x^p+y^p\right)$

(Suggerimento: posto $t=\frac{x}{y}\ldots$*)*

Esercizio 9 Calcolare i seguenti limiti utilizzando il teorema di De L'Hôpital:

(1) $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\sqrt{x}}}{x}$

(2) $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^3}{x}$

(3) $\lim_{x\to+\infty}xe^{-x}$

(4) $\lim_{x\to0^+}x\ln x$

(5) $\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

(6) $\lim_{x\to+\infty}\left(x\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-x^2\sin\frac{1}{x}\right)$