Am120 – Tutorato II

Derivate, disuguaglianze e teorema di De L'Hôpital

Lunedì 14 Marzo 2011

Filippo Cavallari e Vincenzo Morinelli

Esercizio 1

- $y = |x|$
- $y = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
- $y = \sqrt[3]{x}$
- $y = |x|$

Esercizio 2 Dall'ipotesi si ricava che $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\alpha} \Rightarrow 0 \leq \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|^{\alpha - 1}$ e quindi facendo tendere y ad x e applicando il teorema dei carabinieri si ottiene che $0 \leq \lim\limits_{y \to x} \left| \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq \lim\limits_{y \to x} |x - y|^{\alpha - 1} = 0$, in quanto $\alpha > 1$, quindi $f'(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ cioè la funzione è costante.

Esercizio 3 Notiamo innanzitutto che le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono limitate in quanto $|\sin x| \leq 1$ e $|\cos x| \leq 1$ per qualsiasi valore di *x*. Inoltre la funzione x^c definita nell'intervallo $[-1,1]$ è limitata se e solo se $c \geq 0$.

(1) $f(x)$ è continua se $\lim\limits_{x \to 0} x^{\alpha} \sin \dfrac{1}{x^{\beta}} = 0$ per cui $\alpha > 0$.

(2) $f'(0)$ esiste se $\lim\limits_{h \to 0} h^{\alpha - 1} \sin \dfrac{1}{h^{\beta}}$ esiste finito cioè se $\alpha > 1$ nel qual caso $\lim\limits_{h \to 0} h^{\alpha - 1} \sin \dfrac{1}{h^{\beta}} = 0$.

(3) Nel caso in cui $\alpha > 1$, cioè quando la derivata prima esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha x^{\alpha - 1} \sin \dfrac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha - \beta - 1} \cos \dfrac{1}{x^{\beta}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha \geq 1 + \beta$.

(4) $f'(x)$ è continua se e soltanto se $\lim\limits_{x \to 0} \alpha x^{\alpha - 1} \sin \dfrac{1}{x^{\beta}} - \beta x^{\alpha - \beta - 1} \cos \dfrac{1}{x^{\beta}} = 0$ cioè se $\alpha > 1 + \beta$.

(5) $f''(0)$ esiste se $\lim\limits_{h \to 0} \alpha h^{\alpha - 2} \sin \dfrac{1}{h^{\beta}} - \beta h^{\alpha - \beta - 2} \cos \dfrac{1}{h^{\beta}}$ esiste finito cioè se $\alpha > \beta + 2$ nel qual caso

$$\lim_{h \to 0} \alpha h^{\alpha - 2} \sin \frac{1}{h^{\beta}} - \beta h^{\alpha - \beta - 2} \cos \frac{1}{h^{\beta}} = 0.$$

(6) Nel caso in cui $\alpha > \beta + 2$, cioè quando la derivata seconda esiste $\forall x \in [-1,1]$, dal calcolo diretto si ottiene

$$f''(x)=\begin{cases}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x^\beta}-\alpha\beta x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta}-\beta(\alpha-\beta-1)x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta}-\beta^2x^{\alpha-2\beta-2}\sin\frac{1}{x^\beta} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

che è limitata se e soltanto se $\alpha\geq 2+2\beta$.

(7) $f''(x)$ è continua se e soltanto se

$$\lim_{x\to 0}\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\sin\frac{1}{x^\beta}-\alpha\beta x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta}-\beta(\alpha-\beta-1)x^{\alpha-\beta-2}\cos\frac{1}{x^\beta}-\beta^2x^{\alpha-2\beta-2}\sin\frac{1}{x^\beta}=0$$

cioè se $\alpha>2+2\beta$.

Esercizio 4 Procediamo per induzione su *n*. Per $n=1$ si ha la formula di derivazione del prodotto, che è stata dimostrata a lezone. Supponiamola dunque vera per $n<k$ e mostriamo che vale per $n+1$. Dalla base e dall'ipotesi induttiva segue che

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(fg)(x)&=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^n}{dx^n}(fg)(x)\right]\\&=\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}g(x)\right]\\&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d}{dx}\left[\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}g(x)\right]\\&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left[\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}f(x)\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}g(x)+\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}}g(x)\right]\\&=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}f(x)\frac{d^{n-i}}{dx^{n-i}}g(x)+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}}g(x)\end{aligned}$$

Ponendo nella prima somma $i=j-1$, ricordando il suggerimento e osservando che

$$\binom{n+1}{0}=\binom{n+1}{n+1}=1$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(fg)(x)&=\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n}{j-1}\frac{d^j}{dx^j}f(x)\frac{d^{n-j+1}}{dx^{n-j+1}}g(x)+\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}}g(x)\\&=\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}f(x)\frac{d^0}{dx^0}g(x)+\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1}\frac{d^j}{dx^j}f(x)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}}g(x)\\&\quad+\frac{d^0}{dx^0}f(x)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}g(x)+\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}}g(x)\\&=\binom{n+1}{0}\frac{d^0}{dx^0}f(x)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}g(x)+\sum_{i=1}^{n}\left[\binom{n}{i-1}+\binom{n}{i}\right]\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}}g(x)\\&\quad+\binom{n+1}{n+1}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}f(x)\frac{d^0}{dx^0}g(x)\\&=\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}\frac{d^i}{dx^i}f(x)\frac{d^{n-i+1}}{dx^{n-i+1}}g(x)\end{aligned}$$

cioè la tesi.

Esercizio 5 Divideremo la soluzione in più passi. Definiamo

$$A=\left\{\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{x^i}:a_i\in\mathbb{R}\right\}$$

Passo 1 Se $g(x),h(x)\in A$ allora $g(x)+h(x)\in A$. Ovvio.

Passo 2 Se $g(x)\in A$ allora $\frac{c}{x^k}g(x)\in A$ per ogni $c\in\mathbb{R}$ e $k\geq 0$ intero. Ovvio.

Passo 3 Se $g(x)\in A$ allora $g'(x)\in A$. Infatti $\frac{d}{dx}\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{x^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{d}{dx}\frac{a_i}{x^i}=\sum_{i=1}^{n}\left(-i\frac{a_i}{x^{i+1}}\right)$.

Passo 4 Se $g(x)\in A$ allora $\frac{d}{dx}\left(g(x)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=h(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ con $h(x)\in A$. Infatti

$$\frac{d}{dx}\left(g(x)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=\left(g'(x)+\frac{2}{x^3}g(x)\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

e la tesi segue dai primi tre "Passi" con $h(x)=g'(x)+\frac{2}{x^3}g(x)$.

Passo 5 Risulta $\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}=0$ per ogni $k\geq 0$ intero. Infatti osserviamo che la tesi è equivalente a dimostrare che $\lim_{x\to\infty}x^k e^{-x^2}=0$. Per dimostrarlo procediamo per induzione su k.

Base induttiva: $\lim_{x\to\infty}e^{-x^2}=0$, ovvio.

Passo induttivo: supponiamo che $\lim_{x\to\infty}x^i e^{-x^2}=0$ per ogni $0\leq i\leq k$; ne segue, dal teorema di De L'Hôpital, che

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(k+1)x^k}{2xe^{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(k+1)x^{k-1}}{2e^{x^2}}=0\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{x^{k+1}}{e^{x^2}}=0$$

cioè la tesi.

Passo 6 Se $g(x)\in A$ allora $\lim_{x\to 0}\left(g(x)e^{-\frac{1}{x^2}}\right)=0$. Infatti la tesi segue dal Passo 5 e dal fatto che il limite della somma è la somma dei limiti.

Conclusione Osservando che $e^{-\frac{1}{x^2}}=1\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}$ dal Passo 2, dal Passo 4 e dal Passo 6 segue la tesi.

Esercizio 6 (1) Posto $f(x)=x-\sin x$ si ha che $f(0)=0$ e che $f'(x)=1-\cos x\geq 0\ \ \forall x>0$.
Analogamente posto $f(x)=\sin x-x+\frac{x^3}{6}$ si ha che $f(0)=0$ e che $f'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ la quale è non negativa perché $f'(0)=0$ e derivandola si riconduce alla disuguaglianza precedente.

(2) Posto $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$ la tesi segue dall'esercizio precedente.

Esercizio 7 Utilizzando il suggerimento si vede facilmente che derivando la funzione $f(x) = xy - \frac{x^p}{p}$ si ottiene $f'(x) = y - x^{p-1}$ e quindi tale funzione ha un massimo in corrispondenza del punto $x = y^{\frac{1}{p-1}}$. Si ha dunque che $xy - \frac{x^p}{p} \le y^{\frac{1}{p-1}+1} - \frac{1}{p} y^{\frac{p}{p-1}} = y^{\frac{p}{p-1}}\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{y^q}{q}$, cioè la tesi.

Esercizio 8 Se $y = 0$ la tesi è ovvia. Supponiamo quindi $y > 0$. Raccogliendo y^p otteniamo

$$y^p\left(\frac{x^p}{y^p} + 1\right) \le y^p\left(\frac{x}{y} + 1\right)^p \le y^p 2^{p-1}\left(\frac{x^p}{y^p} + 1\right)$$

e quindi, dividendo per y^p, si ha

$$\left(\frac{x}{y}\right)^p + 1 \le \left(\frac{x}{y} + 1\right)^p \le 2^{p-1}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^p + 1\right]$$

posto $t = \frac{x}{y}$ dobbiamo dunque mostrare che

$$t^p + 1 \le (t+1)^p \le 2^{p-1}\left(t^p + 1\right) \quad \forall t \ge 0 \tag{0.1}$$

Posto $f(t) = (t+1)^p - t^p - 1$, dato che $f'(t) = p\left[(t+1)^{p-1} - t^{p-1}\right] > 0$ (in quanto la funzione $h(t) = t^r$ è strettamente crescente se $r > 0$), allora f è crescente. Essendo $f(0) = 0$ risulta provata la prima disuguaglianza di (0.1).

Posto $g(t) = 2^{p-1}\left(t^p + 1\right) - (t+1)^p$, dato che $g'(t) = p\left[(2t)^{p-1} - (t+1)^{p-1}\right]$, si ha che

$$\begin{aligned} &g'(t) < 0 \quad 0 \le t < 1; \\ &g'(t) = 0 \qquad t = 1; \\ &g'(t) > 0 \qquad t > 1. \end{aligned}$$

Dunque il punto $t = 1$ è un minimo per g. Pertanto $0 = g(1) \le g(t)$ cioè la seconda disuguaglianza di (0.1).

Esercizio 9 In tutti i casi sono facilmente verificate le ipotesi del teorema di De L'Hôpital

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} = +\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^3}{x} = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x\to0^+} (-x) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim\limits_{x\to0^+} x\ln x = 0$

(5) $\lim\limits_{x\to0} \frac{-\sin x}{2\cos x - \sin x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} \frac{\cos - 1}{\sin x + x\cos x} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to0} \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = 0$

(6) Osserviamo che

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{\cos\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}\cdot 2\sqrt{y}=\lim_{y\to 0^+}\cos\sqrt{y}=1\Rightarrow \lim_{y\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{y}}{\sqrt{y}}=1$$

(fatto che era comunque noto dai limiti notevoli). Ne segue

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{2}\left(-\frac{\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}+\sin y\right)-\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{2y}\left(\cos\sqrt{y}-y\frac{\sin\sqrt{y}}{2\sqrt{y}}-\cos y\right)=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\cos\sqrt{y}-\cos y}{2y}-\frac{\sin\sqrt{y}}{4\sqrt{y}}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{y\to 0^+}\frac{y\cos\sqrt{y}-\sin y}{y^2}=-\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to +\infty}x^2\left(\frac{1}{x}\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(x\cos\frac{1}{\sqrt{x}}-x^2\sin\frac{1}{x}\right)=-\frac{1}{2}$$