Am120 – Tutorato III

Studio di funzioni. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Formula di Taylor.

Martedì 22 Marzo 2011

Filippo Cavallari e Vincenzo Morinelli

Esercizio 1 Studiare il grafico delle seguenti funzioni:

(1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{2}x^2+\frac{9}{4}$ (2) $f(x)=\frac{1}{4}x^5-\frac{7}{4}x^4+3x^3$ (3) $f(x)=\frac{(3-x^2)^2}{4-2x^2}$

(4) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ (5) $f(x)=\frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ (6) $f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$

(7) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$ (8) $f(x)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$ (9) $f(x)=\frac{\cos x}{1+2\cos^2 x}$

(10) $f(x)=\frac{x}{x-1}e^{-x}$ (11) $f(x)=e^{\frac{x}{x^2-1}}$ (12) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

(13) $f(x)=\frac{2|x|-x^2-x}{x+1}$

Esercizio 2 Dopo aver verificato che le seguenti funzioni soddisfano le ipotesi del teorema di Rolle negli intervalli indicati, trovare esplicitamente i punti in cui hanno derivata nulla:

(1) $f(x)=x^2-3x+2 \quad x\in[1,2]$ (2) $f(x)=x^3+5x^2-6x \quad x\in[0,1]$

(3) $f(x)=\sin^2 x \quad x\in[0,\pi]$ (4) $f(x)=\cos^2 x \quad x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$

Esercizio 3 Dopo aver verificato che la funzione $f(x)=1-\sqrt[5]{x^4}$ si annulla agli estremi dell'intervallo $[-1,1]$ mostrare che la sua derivata non si annulla in nessun punto dell'intervallo $(-1,1)$. Perché non si può applicare il teorema di Rolle?

Esercizio 4 Verificare il teorema di Lagrange per la funzione $f(x)=2x-x^2$ nell'intervallo $[0,1]$.

Esercizio 5 In quale punto la tangente alla funzione $f(x)=x^n$ è parallela alla corda passante per i punti $A(0;0)$ e $B(b;b^n)$?

Esercizio 6 Applicare il teorema di Lagrange alla funzione $f(x)=\sqrt[3]{x}$ con $x\in[1,2]$ per dedurre che $\frac{13}{12}<\sqrt[3]{2}<\frac{4}{3}$.

Esercizio 7 Usando il teorema di Lagrange dimostrare che:

(1) $e^x\geq 1+x$ (2) $b^n-a^n<nb^{n-1}(b-a)$ per $b>a>0$ e $n\in\mathbb{N}$

Esercizio 8 Verificare il teorema di Cauchy per le funzioni $f(x)=x^2$ e $g(x)=x^3$ nell'intervallo $[1,2]$.

Esercizio 9 Dimostrare le seguenti identità:

(1) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2) $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in (-1,1)$

Esercizio 10 Scrivere la formula di Taylor di ordine 6 centrata in $x=\frac{\pi}{4}$ della funzione $\tan x$ con il resto di Peano

Esercizio 11 Dimostrare che $\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \frac{(-1)^n}{2^n}(2n-1)!!\cdot(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}$ e dedurne la formula di Taylor di ordine n con il resto di Peano della funzione $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$.

Esercizio 12 Utilizzando gli sviluppi delle funzioni elementari, verificare che:

(1) $\sin^2 x = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^5)$ (2) $\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2} - \frac{x}{4} + o(x^2)$

(3) $\ln(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4)$ (4) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$

Esercizio 13 Data $f(x)=x^2e^x$ determinare tutti i polinomi di grado 6 tali che

$$\left(f(x)-P(x)\right)^3 = x^4 + o(x^4)$$

Esercizio 14 Calcolare i seguenti limiti utilizzando la formula di Taylor

(1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3 - \sin^3 x}{x^3\left(\cos x^3 - \cos^3 x\right)}$ (2) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\arctan x - x\sin x}{\arctan x - 1 - \ln(1+x) + \cos x}$