Am120 – Soluzioni Tutorato III

Studio di funzioni. Teoremi di Rolle, Lagrange e Cauchy. Formula di Taylor.

Martedì 22 Marzo 2011

Filippo Cavallari e Vincenzo Morinelli

Esercizio 1 (4) Risulta utile il calcolo del seguente limite:

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x=\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x\right)\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2\right)}{\left(\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-x^3+x^3}{\sqrt[3]{\left(2x^2-x^3\right)^2}-x\sqrt[3]{2x^2-x^3}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}-x^2\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{\left(\frac{2}{x}-1\right)^2}-\sqrt[3]{\frac{2}{x}-1}+1\right)}=\frac{2}{3}$$

(abbiamo utilizzato l'identità $a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$ con $a=\sqrt[3]{2x^2-x^3}$ e $b=x$).

Esercizio 2 Le funzioni elencate sono derivabili negli intervalli considerati in quanto sono somma, prodotto e composizione di funzioni derivabili. Inoltre esse assumono lo stesso valore agli estremi dei rispettivi intervalli (verifica che viene omessa). Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Rolle. Troviamo esplicitamente i valori per i quali hanno derivata nulla negli intervalli indicati:

(1) $f'(x)=2x-3$ quindi $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

(2) $f'(x)=3x^2+10x-6$ quindi $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{-5+\sqrt{43}}{3}$.

(3) $f'(x)=2\sin x\cos x$ quindi $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$.

(4) $f'(x)=-2\sin x\cos x$ quindi $f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$.

Esercizio 3 È immediato verificare che $f(-1)=f(1)=0$. Dal calcolo diretto segue inoltre che $f'(x)=-\frac{4}{5\sqrt[5]{x}}$ $\forall x\in[-1,0)\cup(0,1]$ che non si annulla mai mentre nell'origine la funzione non è derivabile. Per questo il teorema di Rolle non si può applicare.

Esercizio 4 La funzione è derivabile in $[0,1]$ in quanto somma e prodotto di funzioni derivabili. Siamo quindi nelle ipotesi del teorema di Lagrange. Dato che $f'(x)=2-2x$, segue $2-2c=f'(c)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=1$ e quindi $c=\frac{1}{2}$.

Esercizio 5 La funzione è derivabile in $[0,b]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Lagrange. Risulta quindi che $nc^{n-1}=f'(c)=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=b^{n-1}$ e quindi $c=\frac{b}{\sqrt[n-1]{n}}$.

Esercizio 6 Per il teorema di Lagrange esiste $c\in(1,2)$ tale che

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{c^2}}=f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\sqrt[3]{2}-1$$

Dato che la funzione $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ è decrescente risulta che

$$\frac{1}{12}<\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}=f'(2)<\sqrt[3]{2}-1<f'(1)=\frac{1}{3}$$

da cui segue la tesi.

Esercizio 7 (1) Distinguiamo due casi: se $x\ge 0$ allora per il teorema di Lagrange risulta $\frac{e^x-1}{x}=e^c$ con $c\in[0,+\infty)$ e nell'intervallo considerato $e^c\ge 1$; il caso $x<0$ è analogo.

(2) Considerata la funzione $f(x)=x^n$ per $x\in[a,b]$ dal teorema di Lagrange segue $\frac{b^n-a^n}{b-a}=nc^{n-1}<nb^{n-1}$ da cui la tesi.

Esercizio 8 Le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in $[1,2]$ e quindi sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Cauchy. Pertanto risulta

$$\frac{2c}{3c^2}=\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(2)-f(1)}{g(2)-g(1)}=\frac{4-1}{8-1}=\frac{3}{7}\text{ con }c\in[1,2]$$

da cui $c=\frac{14}{9}$.

Esercizio 9 (1) Posto $f(x)=\arctan x-\arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Pertanto, poiché $f(0)=0$, risulta $f(x)\equiv 0$ cioè la tesi.

(2) Posto $f(x)=\arccos x+\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{\pi}{2}$ dal calcolo diretto si ottiene che $f'(x)=0\ \forall x\in(-1,1)$. Pertanto, poiché $f(0)=0$, risulta $f(x)\equiv 0$ cioè la tesi.

Esercizio 10 Calcoliamo le prime 6 derivate della funzione:

$$f(x)=\tan x \quad\Rightarrow\quad f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$$

$$f^{(I)}(x)=1+\tan^2 x \quad\Rightarrow\quad f^{(I)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=2$$

$$f^{(II)}(x)=2\tan x+2\tan^3 x \quad\Rightarrow\quad f^{(II)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$$

$$f^{(III)}(x)=2+8\tan^2 x+6\tan^4 x \quad\Rightarrow\quad f^{(III)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=16$$

$$f^{(IV)}(x)=16\tan x+40\tan^3 x+24\tan^5 x \quad\Rightarrow\quad f^{(IV)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=80$$

$$f^{(V)}(x)=16+136\tan^2 x+240\tan^4 x+120\tan^6 x \quad\Rightarrow\quad f^{(V)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=512$$

$$f^{(VI)}(x)=272\tan x+1232\tan^3 x+1680\tan^5 x+720\tan^7 x \quad\Rightarrow\quad f^{(VI)}\left(\frac{\pi}{4}\right)=3904$$

pertanto

$$\tan x=1+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+\frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{10}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{64}{15}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5+\frac{244}{45}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6+o\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6\right)$$

Esercizio 11 Procediamo per induzione.

Base induttiva: $\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=-\frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{3}{2}}$

Passo induttivo: supponendo

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}=\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(2n-3)!!\cdot(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}$$

otteniamo

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)\\ &= \frac{d}{dx}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}(2n-3)!!\cdot(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\left(-\frac{2n-1}{2}\right)(2n-3)!!\cdot(1+x)^{-\frac{2n-1}{2}-1}\\ &= \frac{(-1)^{n}}{2^{n}}(2n-1)!!\cdot(1+x)^{-\frac{2n+1}{2}}\end{aligned}$$

cioè la tesi.
Ne segue che

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right|_{x=0} = \frac{(-1)^n}{2^n}(2n-1)!!$$

da cui

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}(2k-1)!!\frac{1}{k!}x^k + o\left(x^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}x^k + o\left(x^k\right)\end{aligned}$$

Esercizio 12 (1) $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right) \Rightarrow \sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o\left(x^5\right)$

(2) Dato che $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o\left(x^2\right)$ $\quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ si ha

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+e^x} &= \left(1+e^x\right)^{-1} = \left(1+1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)^{-1} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)+\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+o\left(x^2\right)\right)^2+o\left(x^2\right)\right)\\ &= \frac{1}{2}-\frac{x}{4}+o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

(3) Dato che $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right)$ $\quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$ si ha

$$\begin{aligned}\ln(\cos x) &= \ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)\\ &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)-\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^5\right)\right)^2\right)\\ &= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{12}+o\left(x^4\right)\end{aligned}$$

(4) Dato che $e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+o\left(x^4\right)$ $\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)$ si ha

$$
\begin{aligned}
e^{\sin x} &= 1+x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^2+\frac{1}{6}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^3+\frac{1}{24}\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^4\right)\right)^4 \\
&= 1+x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4+o\left(x^4\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 13 Sia $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6$. Sviluppando $f(x)$ si ottiene

$$
\begin{aligned}
x^2e^x &= x^2\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+o\left(x^4\right)\right) \\
&= x^2+x^3+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^5}{3!}+\frac{x^6}{4!}+o\left(x^6\right)
\end{aligned}
$$

dunque

$$
f(x)-P(x)=-a_0-a_1x+(1-a_2)x^2+(1-a_3)x^3+\left(\frac{1}{2!}-a_4\right)x^4+\left(\frac{1}{3!}-a_5\right)x^5+\left(\frac{1}{4!}-a_6\right)x^6+o\left(x^6\right)
$$

quindi

$$
\begin{aligned}
\left(f(x)-P(x)\right)^3 &= -a_0^3-3a_0^2a_1x+\left[3a_0^2(1-a_2)-3a_0a_1^2\right]x^2+\left[-a_1^3+3a_0^2(1-a_3)+a_0a_1(1-a_2)\right]x^3 \\
&\quad+\left[3a_0^2\left(\frac{1}{2}-a_4\right)+3a_1^2(1-a_2)-3a_0(1-a_2)^2+a_0a_1(1-a_3)\right]x^4+o\left(x^4\right).
\end{aligned}
$$

Imponendo che

$$
\left(f(x)-P(x)\right)^3=x^4+o\left(x^4\right)
$$

si ottiene

$$
\begin{cases}
a_0=0 \\
a_1=0 \\
3a_1^2(1-a_2)=1
\end{cases}
$$

che è impossibile. Pertanto nessun polinomio di grado 6 soddisfa la richiesta fatta.

Esercizio 14 (1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^3-\sin^3 x}{x^3\left(\cos x^3-\cos^3 x\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^3-\frac{x^9}{3!}+o\left(x^9\right)\right)-\left[x^3-\frac{x^9}{6^3}+3x^2\left(-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\right)+3\frac{x^7}{6^2}-\frac{x^9}{5!}+o\left(x^9\right)\right]}{x^3\left\{\left(1-\frac{x^6}{2!}+o\left(x^6\right)\right)-\left[1-\frac{x^6}{2^3}+3\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}\right)-3\frac{x^4}{2^2}-\frac{x^6}{2!4!}+o\left(x^6\right)\right]\right\}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^5}{2}+o\left(x^5\right)}{\frac{3}{2}x^5+o\left(x^5\right)}=\frac{1}{3}$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)\arctan x-x\sin x}{\arctan x-1-\ln\left(1+x\right)+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)-x^2+o\left(x^3\right)}{x-\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)-1-\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right)+\left(1-\frac{x^2}{2!}+o\left(x^3\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)}{-\frac{2}{3}x^3+o\left(x^3\right)}=\frac{3}{4}$$