AM2 2010-2011: Tracce delle lezioni- VI Settimana

MATRICE HESSIANA

Sia $f \in C^2(O) \quad u = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. La matrice $n \times n$ delle derivate seconde

$$H_f(u) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(u) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

é detta matrice Hessiana.

Dal Lemma di Schwartz: H_f é **matrice simmetrica**.

Osservazione e un controesempio. Supponiamo $n = 2$. Per definizione

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} := \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \, \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}$ esistono se e solo i limiti

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) := \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [\frac{\partial f}{\partial y}(x+h, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)] = \lim_{h \to 0} \left[\lim_{k \to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk} \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) := \lim_{k \to 0} \frac{1}{k} [\frac{\partial f}{\partial x}(x, y+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)] = \lim_{k \to 0} \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+k,y) + f(x,y)}{hk} \right]$$

esistono, e $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ se e solo se i due limiti sono uguali:

$$\lim_{h \to 0} \left[\lim_{k \to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x+h,y) - f(x,y+k) + f(x,y)}{hk} \right] = \lim_{k \to 0} \left[\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y+k) - f(x+k,y) + f(x,y)}{hk} \right]$$

Ció suggerisce che, in generale, risulti $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, ma che possa anche accadere che $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_i}$ esistano entrambe ma siano diverse perché, come sappiamo, due successivi passaggi al limite non si possono in generale scambiare.
Ad esempio,

$$f(x, y) := \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \qquad \forall (x, y) \neq (0, 0) \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{x \to 0} [\lim_{y \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}] = \lim_{x \to 0} 1 = 1, \qquad \lim_{y \to 0} [\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}] = \lim_{y \to 0} (-1) = -1$$

Ció suggerisce un esempio in cui l'invertibilitá nell'ordine di derivazione non vale. Sia

$$g(x, y) := xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{e, quindi,} \quad \frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{x^5 - y^4 x - 4x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Si vede subito che g, g_x, g_y hanno limite zero in $(0, 0)$, e quindi g ha un prolungamento C^1 su tutto $\mathbf{R}^2$. Poi, in $(0, 0)$ troviamo che

$$[\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}](0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\frac{\partial g}{\partial x}(0,y) = -1 \quad \text{mentre} \quad [\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}](0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\frac{\partial g}{\partial y}(x,0) = 1$$

Coerentemente, g non é di classe C^2. Infatti,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y} = \frac{x^6 + 9x^4y^2 - 9x^2y^4 - y^6}{(x^2+y^2)^3}$$

non é continua in $(0,0)$, perché

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(x,0) \;=\; -1 \quad \forall x \neq 0, \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial x\,\partial y}(0,y) \;=\; 1 \quad \forall y \neq 0$$

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(x))$, $x \in \mathbf{R}^n$. Allora:

$$f(x+h) \;=\; f(x) + \;<\nabla f(x)\,,\, h>\; + \frac{1}{2} < H_f(x)\,h,\, h> \;+\; \circ\,(||h||^2)$$

Prova. Sia $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $h = (h_1,\ldots,h_n)$, $\|h\| < r$. Se $\varphi(t) := f(x+th)$, é

$$\varphi(0) \;=\; f(x), \quad \varphi(1) \;=\; f(x+h)$$

$$\varphi'(t) \;=\; <\nabla f(x+th), h> \;=\; \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+th)h_j$$

$$\varphi''(t) = \sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x+th)h_j \;=\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+th)h_ih_j \;=$$

$$= < H_f(x\;+\;t\,h)\,h,\; h>$$

Ma $\qquad \varphi(1) \;=\; \varphi(0) \;+\; \varphi'(0) \;+\; \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$ e quindi

$$f(x+h) \;=\; f(x) \;+ <\nabla f(x)\,,\, h> \;+ \frac{1}{2} < H_f(x)h, h> \;+$$

$$+\int_0^1 (1-t) \;<\; [H_f(x+th) \;-\; H_f(x)]\,h, h> \;dt$$

Stima del resto: $\quad \forall \epsilon > 0 \;\exists \delta_\epsilon > 0 : \;|t| \le \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |f_{x_ix_j}(x+th) - f_{x_ix_j}(x)| \le \epsilon \quad \Rightarrow$

$$|\sum_{i,j=1}^{n}\left[f_{x_ix_j}(x+th) - f_{x_ix_j}(x)\right]\; h_ih_j\;| \;\le n^2\epsilon||h||^2$$

MASSIMI E MINIMI IN PIÚ VARIABILI

$u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per $f \;\Leftrightarrow\; \exists \delta > 0 : \; f(u) \leq f(v) \;\; \forall v \in B_\delta(u)$

Condizioni necessarie. Se $u \in \mathbf{R}^n$ é **minimo locale libero** per f, allora

(i) $f \in C^1(B_r(u)) \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \, = \, 0$ (u é **critico** o **stazionario** per f)
(ii) $f \in C^2(B_r(u)) \quad \Rightarrow \quad < H_f(u)\, h, \; h > \, \geq \, 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$

Prova. (i) $h \in \mathbf{R}^n, \quad |t| \leq \delta_h \quad \Rightarrow \quad f(u) \leq f(u+th) \quad \Rightarrow$

$$0 \; = \; \tfrac{d}{dt}\, f(u+th)_{|t=0} \; = < \nabla f(u), h > \quad \Rightarrow \quad \nabla f(u) \; = \; 0.$$

(ii) Dalla formula di Taylor: $\quad \nabla f(u) \, = \, 0, \quad 0 \, \leq \, f(u+h) - f(u) \, =$

$$\nabla f(u) + ||h||^2 \, [< H_f(u) \, \frac{h}{||h||}, \, \frac{h}{||h||} > \, + \, \circ\,(1)] \quad \Rightarrow \quad < H_f(u) \, \frac{h}{||h||}, \, \frac{h}{||h||} \; > \, \geq \, 0$$

Una condizioni sufficente. Sia Se $f \in C^2(B_r(u))$ e $\nabla f(u) = 0$, allora

$$< H_f(u)\, h, h > \; > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, \; h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{é minimo locale}$$

Prova. $h \rightarrow < H_f(u)\, h, h >$ continua, $S^{n-1} := \{h \in \mathbf{R}^n : \; \|h\| = 1\}$ compatto

$$\Rightarrow \quad \exists \underline{h} \in S^{n-1} \quad \text{tale che} \quad m := \inf_{h \in S^{n-1}} \; < H_f(u)\, h, h > = < H_f(u)\, \underline{h}, \underline{h} > \; > \; 0$$

perché $< H_f(u)h, h >> 0 \quad \forall h \neq 0$. Quindi, $\quad < H_f(u)h, h > \, \geq \, m\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.
Allora, usando Taylor e $\nabla f(u) = 0$ vediamo che $\quad 0 < \|h\| \; << \; 1 \; \Rightarrow$

$$f(u+h) - f(u) \; = \; \|h\|^2 \; \left[< H_f(u) \, \frac{h}{\|h\|}, \, \frac{h}{\|h\|} > \; + \; \circ\,(1) \right] \; \geq \; \|h\|^2 \; [m + \circ(1)] \; > 0$$

Massimi locali liberi Se invece $\exists \delta > 0 : \; f(u) \geq f(v) \;\; \forall v \in B_\delta(u)$, u si dice massimo locale libero per f. Anche in tal caso, se $f \in C^1(B_r(u))$, necessariamente $\nabla f(u) = 0$, mentre, se $f \in C^2(B_r(u))$, allora $\quad < H_f(u)\, h, \; h > \, \leq \, 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n$.

Analogamente, la condizione sufficente perché u sia massimo locale libero per $f \in C^2(B_r(u))$ é che

$$\nabla f(u) = 0 \quad \text{e} \quad < H_f(u)\, h, h > \; < 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, \; h \neq 0$$

Dunque, la natura di un punto stazionario $u \, = \, (x_1, \ldots, x_n)$ di f dipende dal segno di $< H_f(u)\, h, \; h >$, forma quadratica associata alla matrice Hessiana.

Forme quadratiche

Sia $\mathcal{A}$=$(a_{ij})_{ij=1,\dots,n}$=$\mathcal{A}^t$ matrice $n \times n$ simmetrica (cioé $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$). Sia $h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbf{R}^n$. Diremo che $\mathcal{A}$, ovvero la forma quadratica associata ad $\mathcal{A}$

$$< \mathcal{A}\, h,\, h > := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, h_j$$

é **definita positiva (negativa)** se $< \mathcal{A}\ h,\, h > > 0\,(< 0), \qquad \forall\, h \neq 0$

é **semidefinita positiva (negativa)** se $< \mathcal{A}\ h,\, h > \geq 0\,(\leq 0), \qquad \forall\, h \in \mathbf{R}^n$

Il segno della forma quadratica $< \mathcal{A}\ h,\, h >$ é legato al segno degli autovalori di $\mathcal{A}$: **$\mathcal{A}$ é definita positiva sse i suoi autovalori sono tutti positivi**.
Ricordiamo che $\lambda \in \mathbf{C}$ é **autovalore di $\mathcal{A}$** se esiste un vettore $\xi \in \mathbf{C}^n$ (**autovettore** corrispondente a λ) tale che

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi$$

Equivalentemente, λ é autovalore se e solo se $p_{\mathcal{A}}(\lambda) := \det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0$, cioé se λ é uno zero di $p_{\mathcal{A}}$, il **polinomio caratteristico** di $\mathcal{A}$ ($p_{\mathcal{A}}$ é polinomio di grado n).
Ora, $\quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^t \quad \Rightarrow \quad$ **gli autovalori di $\mathcal{A}$ sono tutti reali**. Infatti,

$$h \in \mathbf{C}^n \quad \Rightarrow \quad \overline{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i\, \overline{h_j}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \overline{h_i}\, h_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\, \overline{h_j}\, h_i \quad \Rightarrow \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, h_i \overline{h_j} \in \mathbf{R}$$

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi \quad \Rightarrow \quad \lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i\, \overline{\xi_i} \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i \overline{\xi_j} \quad \Rightarrow \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

In particolare, siccome $\mathcal{A}\xi = \lambda\xi \Rightarrow < \mathcal{A}h,\, h > := \lambda\|h\|^2$, *la positivitá di $\mathcal{A}$ implica la positivitá degli autovalori.* Infine, $\quad \mathcal{A} = \mathcal{A}^t \quad \Rightarrow \quad$ **autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali**. Infatti,

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi \quad \Rightarrow \quad < \mathcal{A}\xi, \eta > = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \eta_j = \lambda < \xi, \eta >$$

$$\mathcal{A}\eta = \mu\eta \quad \Rightarrow \quad < \mathcal{A}\eta, \xi > = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \eta_i\, \xi_j = \mu < \xi, \eta >$$

Ma, da $a_{ij} = a_{ji}$ segue che $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \xi_i\, \eta_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}\, \xi_j\, \eta_i = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, \eta_i\, \xi_j$ e quindi $\lambda < \xi, \eta > = \mu < \xi, \eta >$, e quindi $< \xi, \eta > = 0$ perché $\lambda \neq \mu$.

Ora, se gli autovalori $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ della matrice simmetrica $\mathcal{A}$ sono tutti distinti, allora i corrispondenti autovettori (normalizzati) ξ^j formano una base ortonormale. Ma anche se gli autovalori non sono tutti distinti tra di loro é ancora vero, seppur piú laborioso da mostrare, che esiste una *base ortonormale di autovettori*, diciamo $\mathcal{A}\xi^j = \lambda_j \xi^j, \quad j = 1, \ldots, n$. Indichiamo con $\mathcal{B}$ la matrice (*invertibile*) che ha per colonne gli autovettori, per cui $\mathcal{B}e_j = \xi^j$ e $\mathcal{B}^{-1}\xi^j = e_j$. Dunque

$$\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}e_j = \lambda_j e_j \quad \text{e quindi} \quad < \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}h, h >= \sum_{j=1}^n \lambda_j h_j^2$$

Siccome $\mathcal{B}^t\mathcal{B} = \mathcal{I}$, ovvero $\mathcal{B}^t = \mathcal{B}^{-1}$ e $\|\mathcal{B}x\|^2 = \|\sum_{j=1}^n x_j \xi^j\|^2 = \sum_j x_j^2 = \|x\|^2$ (ovvero $\mathcal{B}$ é *matrice ortogonale*) concludiamo che

$$\begin{aligned} < \mathcal{A}\, h,\, h > &= < \mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}\, h, \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}h > \, = \, < \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}h, \mathcal{B}\mathcal{B}^{-1}h > \geq \\ &\geq \lambda_1 \|B^{-1}h\|^2 = \lambda_1 \|h\|^2. \end{aligned}$$

Abbiamo dunque provato che

Proposizione 1

(ii) $\mathcal{A}$ é definita positiva (negativa) $\Leftrightarrow \lambda_1 > 0 \qquad (\lambda_n < 0)$

(iii) $\mathcal{A}$ é semidefinita positiva (negativa) $\Leftrightarrow \lambda_1 = 0 \qquad (\lambda_n = 0)$

Diamo ora una dimostrazione puramente analitica della Proposizione 1.

Proposizione 2 Sia $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t$, $\lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ i suoi autovalori. Allora

$$\lambda_1 = \inf_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\; h, h > \qquad\qquad \lambda_n = \sup_{\|h\|=1} < \mathcal{A}\; h, h >$$

Prova. Come sopra, continuitá e compattezza assicurano che

$$\exists \underline{h} \in S^{n-1} \quad \text{tale che} \quad m := \inf_{S^{n-1}} < \mathcal{A}h, h > = < \mathcal{A}\underline{h}, \underline{h} >$$

Sia $f(h) = \frac{<\mathcal{A}h,h>}{\|h\|^2}$, $h \neq 0$. Per linearitá, $f(\underline{h}) = \min\limits_{h\neq 0} f(h)$ e quindi $\nabla f(\underline{h}) = 0$, perché f é differenziabile in $h \neq 0$. E infatti

$$\nabla f(h) = 2\frac{\mathcal{A}h}{\|h\|^2} - 2\frac{< \mathcal{A}h, h > h}{\|h\|^4}$$

perché $\mathcal{A} = \mathcal{A}^t \Rightarrow \quad \nabla < \mathcal{A}h, h >= 2\mathcal{A}h$ e $\nabla \|h\|^{-2} = -2\frac{h}{\|h\|^4}$. Dunque

$$0 = \nabla f(\underline{h}) = 2\mathcal{A}\underline{h} - 2 < \mathcal{A}\underline{h}, \underline{h} > \underline{h} \qquad \text{e quindi} \qquad \mathcal{A}\underline{h} = < \mathcal{A}\underline{h}, \underline{h} > \underline{h} = m\underline{h}$$

Dunque m é un autovalore di $\mathcal{A}$, ed é necessariamente il piú piccolo, giacché

$$\mathcal{A}h = \lambda h, \quad ||h|| = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = < \mathcal{A}h, h > \geq m$$

Esercizi e complementi

1. Sia
$$f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) \ .$$

É

$$f_x = 4x(x^2+y^2) - 4x, \qquad\qquad f_y = 4y(x^2+y^2) + 4y$$

$$f_{xx} = 4(x^2+y^2) + 8x^2 - 4, \qquad f_{xy} = 8xy, \qquad f_{yy} = 4(x^2+y^2) + 8y^2 + 4$$

Punti stazionari: $(0,0)$, $(\pm 1, 0))$; $\det H(\pm 1, 0) > 0$, $\det H(0,0) < 0$; $(\pm 1, 0)$ sono **minimi globali**: $\|u\| \to +\infty \Rightarrow f(u) \to +\infty$; $(0,0)$ é una sella.

2. Sia $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
Notiamo che
$$\nabla g = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = y, \quad y^2 = x$$
e quindi $(0,0), (1,1)$ sono gli unici punti critici di g. Poi

$$g_{xx} = 6x, g_{yy} = 6y, g_{xy} = -3$$

e quindi

- $H_g(0,0)$ ha autovalori ± 3 e quindi $(0,0)$ é di sella

- $H_g(1,1)$ ha autovalori positivi e quindi $(1,1)$ é di minimo locale (e non assoluto, perché $\inf\limits_{\mathbf{R}^2} = -\infty$).

3. Provare che se $f \in Lip_{loc}(\Omega)$ allora f é Lipschitziana sui sottoinsiemi K compatti di Ω.

Supponiamo il contrario:
esiste K ed esistono $x_j, y_j \in K$ tali che $\frac{\|f(x_j)-f(y_j)\|}{\|x_j-y_j\|} \to_j \infty$.
Siccome f é limitata in K, dovrá risultare $\|x_j - y_j\| \to_j 0$. Passando a sottosuccessioni, possiamo supporre che

$$\exists \bar{x} \in K: \quad x_j \to_j \bar{x}, \quad y_j \to_j \bar{x}, \quad \frac{\|f(x_j) - f(y_j)\|}{\|x_j - y_j\|} \to_j \infty$$

contraddicendo la Lipschitzianitá in $B_r(\bar{x})$ per qualche $r > 0$.

4. Il laplaciano in coordinate polari. Sia $f \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto.

$$\text{Laplaciano di} f: \qquad \Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Sia $n = 2$ e scriviamo f in coordinate polari: $g(\rho, \theta) := f(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$. Provare che

$$(\Delta f)(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) = g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho}$$

Si ha

$$g_\rho = f_x(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \cos\theta + f_y(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \sin\theta$$

$$g_{\rho\rho} = f_{xx} \cos^2\theta + 2 f_{xy} \sin\theta \cos\theta + f_{yy} \sin^2\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho \sin\theta + f_y(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta) \rho \cos\theta$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2 \left[f_{xx} \sin^2\theta - 2 f_{xy} \sin\theta \cos\theta + f_{yy} \cos^2\theta - \frac{1}{\rho}(f_x \cos\theta + f_y \sin\theta) \right]$$

Quindi, essendo $f_x \cos\theta + f_y \sin\theta = g_\rho$, troviamo

$$g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho} = (f_{xx} + f_{yy})(\rho \cos\theta, \rho \sin\theta)$$

5. (i) Calcolare ΔU, ove $U(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, $x^2 + y^2 > 0$.
(ii) Sia $N \geq 3$. Sia $U(x) = \frac{1}{\|x\|^{N-2}}$, $x \in \mathbf{R}^N$, $\|x\| > 0$. Calcolare ΔU.

6. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare che

$$\exists c > 0 : \; < H_f(x)h, h > \geq c\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \; \Rightarrow \; \forall y \in \mathbf{R}^n \; \exists! x \in \mathbf{R}^n : \quad \nabla f(x) = y$$

Prova. Fissati x, y, poniamo $\varphi(t) :=< \nabla f(tx + (1-t)y), x - y >$. É

$$\varphi'(t) \; = < H_f(tx + (1-t)y)\,(x - y), x - y > \geq \; c\,\|x - y\|^2$$

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y >= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \geq c\|x - y\|^2$$

Ció implica in particolare l'unicitá: $\nabla f(x) = \nabla f(y) \Rightarrow \|x - y\| = 0$. Inoltre

$$f(x) \; = \; f(0) \; + \; \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx) dt \; = \; f(0) \; + \; \int_0^1 < \nabla f(tx) - \nabla f(0) + \nabla f(0), x > dt \; \geq$$

$$f(0) + < \nabla f(0), x > + \frac{c}{2}\|x\|^2$$

e quindi per ogni fissato y la funzione $x \to f(x) - < x, y >$ é coerciva e continua e quindi ha un minimo globale. Dunque l'equazione $\nabla(f(x) - < x, y >) = 0$ ha soluzione, e cioé l'equazione $\nabla f(x) = y$ ha soluzione.