AM2: Tracce delle lezioni-VIII Settimana

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE

Siano $f, g \in C(\mathbf{R})$ tali che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(y)g(x-y)|dy < +\infty \quad \forall x \in \mathbf{R}$. Allora é definita per ogni x in $\mathbf{R}$, la funzione :

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt = (g * f)(x)$$

Tale operazione tra funzioni si chiama *prodotto di convoluzione* e la funzione $f * g$ é detta, semplicemente, *convoluzione* tra f e g.
Che $(f * g)$ sia uguale a $(g * f)$ si vede subito effettuando il cambio di variabile $t = x - y$.

NOTA. Se $f, g \in C_0$, ovvero $\quad supp f := \overline{\{x : f(x) \neq 0\}} \quad$ é compatto (e lo stesso vale per g), allora $f * g$ é definita e sta in C_0 (infatti $supp(f * g) \subset supp f + supp g$).

In particolare $f * g$ é integrabile su $\mathbf{R}$ e c'é invertibilitá nelle due integrazioni successive ('Fubini'):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x)dx =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dy \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)g(y)dx \right) dy =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)dx \right) dy = \int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy \times \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)dx \right) dy =$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)dy \right) \times \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt \right)$$

Regolaritá di $f * g$. Dalla teoria degli integrali dipendenti da parametro segue che, se per ogni $\xi \in \mathbf{R}$ esiste $h_\xi \in C(\mathbf{R})$ assolutamente integrabile in $\mathbf{R}$ ed esiste I_ξ, intervallo centrato in ξ, tali che $|f(y)g(x-y)| \leq |h_\xi(y)| \quad \forall x \in I_\xi, \forall y \in \mathbf{R}$, allora $f * g \in C(\mathbf{R})$.
Ad esempio, $f * g$ é continua se f é limitata e g assolutamente integrabile (o viceversa); $f * g$ é continua se f (oppure g) é a supporto compatto, perché,

se f é supportata dall'intervallo $[-R,R]$, ovvero $f(x)=0 \quad \forall |x|\geq R$, allora

$$|x|\leq M, \quad |y|\geq R+M \quad \Rightarrow \quad |x-y|\geq R \quad \Rightarrow f(x-y)=0 \quad \Rightarrow$$

$|f(x-y)\,g(y)| \;\leq\; \|f\|_\infty \chi_{[-(M+R),M+R]} \;\; |g(y)|$ od anche

$|f(y)\,g(x-y)| \;\leq\; \left(\sup\limits_{|x|\leq M+R} |g(x)|\right) \;|f(y)|.$ In particolare

$$g\in C_0^k \quad \Rightarrow \quad f*g\in C^k \quad \text{e} \quad \frac{d^j}{dx^j}(f*g)(x) \;=\; (f*\frac{d^j g}{dx^j})(x) \qquad \forall j\leq k$$

$$|\frac{d^j}{dx^j}g(x-y)f(y)| \;\;\leq \sup_{x\in\mathbf{R}} |g^{(j)}(x)|\;\chi_{[-(R+M),R+M]}\;f(y)$$

C'é quindi equidominatezza, ed allora si puó derivare quanto si puó sotto segno di integrale e ottenere

$$\frac{d^j}{dx^j}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\frac{d^j g}{dx^j}\,(x-t)dy$$

Esercizio. Provare che se $f\in C_0$ e p é un polinomio di grado n, allora $f*p$ é un polinomio di grado n.

Scriviamo $p(x-y)=\sum_{k=0}^n a_k(x-y)^k=\sum_{k=0}^n b_k(y)x^k$ e quindi

$$(f*p)(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)p(x-y)dy=\sum_{k=0}^n\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)b_k(y)dy\right)x^k$$

Diseguaglianza di Young Siano $f,g\in C(\mathbf{R})$ e tali che per ogni $n\in\mathbf{N}$ esista $h_n\in C(\mathbf{R})$ assolutamente integrabile in $\mathbf{R}$ tale che $|f(y)g(x-y)|\leq h_n(y) \quad \forall x\in[-n,n], \forall y\in\mathbf{R}$. Allora

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|(f*g)(x)|dx\leq\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|dx$$

Da Fubini: $\int\limits_{-n}^{n}\left(\int\limits_{-k}^{k}|f(x-y)g(y)|dy\right)dx=\int\limits_{-k}^{k}\left(\int\limits_{-n}^{n}|f(x-y)g(y)|dx\right)dy=$
$\int\limits_{-k}^{k}\left(|g(y)|\int\limits_{-n}^{n}|f(x-y)|dx\right)dy\leq\int\limits_{-k}^{k}\left(|g(y)|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x-y)|dx\right)dy\leq$

$$\leq\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|g(y)|dy\right)\;\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx\right)$$

Siccome

$$\int_{-\infty}^{-k} |f(x-y)g(y)|dy + \int_{k}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|dy \le \int_{-\infty}^{-k} h_n dy + \int_{k}^{+\infty} h_n(y)dy \to_{k\to+\infty} 0$$

ovvero $I_k(x) := \int_{-k}^{k} |f(x-y)g(y)|dy$ converge uniformemente in $[-n,n]$ alla funzione $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|dy$, si puó passare al limite sotto segno di integrale e ottenere che

$$\int_{-n}^{n} \left(\int_{-k}^{k} |f(x-y)g(y)|dy \right) dx \to_{k\to+\infty} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|dy \right) dx$$

e quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |(f*g)(x)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x-y)g(y)|dy \right) dx = \lim_{n\to+\infty} \lim_{k\to+\infty} \int_{-n}^{n} \left(\int_{-k}^{k} |f(x-y)g(y)|dy \right) dx$$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |g(y)|dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx \right)$$

REGOLARIZZAZIONE PER CONVOLUZIONE

Sia $\varphi \in C_0^\infty$, $\varphi \ge 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx = 1$ (φ **nucleo regolarizzante**).

Sia $\varphi_\epsilon(x) := \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$. (**successione regolarizzante**)

Sia f continua. Allora $f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon\to 0} f$ uniformemente sui limitati.

Infatti, $\varphi_\epsilon(x) = 0$ se $|x| \ge \epsilon$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_\epsilon(x-y)\, dy = 1$, e quindi $x \in B_R \Rightarrow$

$$|f(x) - (f*\varphi_\epsilon)(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy - \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \right| \le$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)-f(y)|\varphi_\epsilon(x-y)\, dy \le \sup_{|x|\le R,\, |x-y|\le\epsilon} |f(x)-f(y)| \to_{\epsilon\to 0} 0$$

perché f é uniformemente continua in $[R-\epsilon,\ R+\epsilon]$.

Un'applicazione: Il Teorema di aprossimazione di Weierstrass. Sia $f \in C(\mathbf{R})$. Allora, per ogni $R > 0$ esiste una successione di polinomi che converge uniformemente ad f in $[-\frac{R}{3}, \frac{R}{3}]$.

Indichiamo ancora con f un prolungamento continuo di f a tutto $\mathbf{R}$, tale che $f \equiv 0$ fuori di $[-\frac{2}{3}R, \frac{2}{3}R]$. Sia

$$\varphi_n(t) = (R^2 - t^2)^n, \qquad c_n := (\int_{-R}^{R} [R^2 - t^2]^n \, dt)^{-1}.$$

É $\int_{-R}^{R} [R^2 - t^2]^n \, dt = R^{2n+1} \int_0^1 (1-s^2)^n ds = R^{2n+1} \left[\sqrt{\frac{\pi}{2(2n+1)}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})\right]$. Dunque $c_n \int_{-R}^{R} \varphi_n(t) \, dt = 1$, $\quad c_n = \frac{O(\sqrt{n})}{R^{2n+1}}$. Inoltre $\quad \forall \delta > 0: \; c_n \int_{\delta}^{R} \varphi_n(t) \, dt \to_n 0$.

Infatti $\int_{\delta}^{R} (R^2 - t^2)^n \, dt = R^{2n+1} \int_{\frac{\delta}{R}}^{1} (1-s^2)^n \, ds \le R^{2n+1} (1 - \frac{\delta^2}{R^2})^n = R^{2n+1} \circ (\frac{1}{\sqrt{n}})$.

Sia $\quad p_n(x) := c_n \int_{-\frac{2}{3}R}^{\frac{2}{3}R} f(y) \varphi_n(x-y) \, dy, \quad |x| \le \frac{R}{3}$

Come osservato, i p_n sono polonomi. Resta dunque da provare la uniforme convergenza di p_n a f in $[-\frac{R}{3}, \frac{R}{3}]$

Dato $\epsilon > 0$, sia $\delta = \delta_\epsilon$: $\quad |t| \le \delta_\epsilon \;\Rightarrow\; |f(x-t) - f(x)| \le \epsilon$. Poi,

$$|x| \le \frac{R}{3} \quad \Rightarrow \quad |p_n(x) - f(x)| = c_n \left| \int_{x-\frac{2}{3}R}^{x+\frac{2}{3}R} f(x-t) \, \varphi_n(t) \, dt - \int_{-R}^{R} f(x) \, \varphi_n(t) \, dt \right| \le$$

$$\le c_n \int_{x-\frac{2}{3}R}^{x+\frac{2}{3}R} |f(x-t) - f(x)| \, \varphi_n(t) \, dt + c_n \sup |f| \, [\int_{-R}^{x-\frac{2}{3}R} \varphi_n(t) \, dt + \int_{x+\frac{2}{3}R}^{R} \varphi_n(t) \, dt] \le$$

$$\le \epsilon c_n \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) dt + 2 \sup |f| c_n [\int_{x-\frac{2}{3}R}^{-\delta} \varphi_n(t) dt + \int_{\delta}^{x+\frac{2}{3}R} \varphi_n(t) dt] + 2 \sup |f| c_n \int_{\frac{1}{3}R}^{R} \varphi_n(t) dt \le$$

$$\le \epsilon \; c_n \int_{-\delta}^{\delta} \varphi_n(t) \, dt + 6 \sup |f| \; c_n \int_{\frac{1}{3}R}^{R} \varphi_n(t) \, dt$$

perché $\quad |x| \le \frac{R}{3} \;\Rightarrow\; -R \le x - \frac{2}{3}R \le -\frac{1}{3}R, \quad \frac{1}{3}R \le x + \frac{2}{3}R \le R.$

Dunque $\quad \sup_{|x| \le \frac{1}{3}} |p_n(x) - f(x)| \le \epsilon + \circ(1) \quad$ e quindi

$$\limsup_n \left[\sup_{|x| \le \frac{1}{3}} |p_n(x) - f(x)| \right] \le \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0.$$