AM2: Tracce delle lezioni-IX Settimana

SPAZI METRICI ED IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Ricordiamo che si dice **metrica, o distanza** su X una funzione

$$d : X \times X \to \mathbf{R} \qquad\qquad \text{tale che}$$

(i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X \quad$ e $\quad d(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y$
(ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in X$
(iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in X$ (**diseguaglianza triangolare**)
La coppia (X,d) si chiama spazio metrico. Se $A \subset X$, $d_{|A}$ é metrica (indotta) su A.

Ricordiamo che una funzione su V, spazio vettoriale (su $\mathbf{R}$), $p : V \to \mathbf{R}$ tale che

(i) $p(x) \geq 0 \quad \forall x \in V \quad$ e $\quad p(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
(ii) $p(tx) = |t|p(x) \quad \forall t \in \mathbf{R}, \forall x \in V \quad$ e
(iii) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x,y \in V$ **diseguaglianza triangolare**

si dice norma su V e $(V, p(.))$ si dice spazio normato. Se non ingenera confusione, scriveremo $\|x\|$ per $p(x)$. Posto $d(x,y) := \|x - y\|$, d é una metrica: ogni spazio normato é in particolare uno spazio metrico.

ESEMPI. Su $\mathbf{R}^n$ si possono definire diverse norme (e corrispondenti metriche):
Se $p \geq 1$, $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ é una norma (la norma euclidea se $p = 2$)
$\|x\|_\infty := \max\{|x_i| : \quad i = 1, \ldots, n\}$ é un'altra norma su $\mathbf{R}^n$.

Spazi di successioni. $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ (o $\mathbf{R}^\infty$) indica lo spazio vettoriale delle funzioni di $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$ (ovvero lo spazio di tutte le successioni di numeri reali).
$l^\infty := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} | \sup\limits_{n \in \mathbf{N}} |x(n)| < +\infty\}$ é il sottospazio (lineare) di $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ formato dalle **successioni limitate**. Una norma su l^∞ é data da $\|x\|_\infty := \sup\limits_{\mathbf{N}} |x(n)|$
Lo spazio delle funzioni continue. Sia $K \subset \mathbf{R}^n$ compatto. Sia $V = C(K, \mathbf{R}^m)$ lo spazio (vettoriale) delle funzioni continue su K e a valori in $\mathbf{R}^m$. Allora

$$\|f\|_\infty := \max_K |f| \qquad\qquad \text{é una norma su} \quad C(K, \mathbf{R}^m)$$

$C_{2\pi}(\mathbf{R})$ indicherá lo spazio delle funzioni, reali o complesse, continue e 2π-periodiche.

Ricordiamo che in uno spazio normato V, valgono le relazioni di compatibilitá:

$$x_n \to_n x, \quad y_n \to_n y, t_n, s_n \in \mathbf{R}, t_n \to_n t, s_n \to_n s \quad \Rightarrow \quad t_n x_n + s_n y_n \to_n tx + sy$$

Continuitá Se $(X,d),(Y,\rho)$ sono spazi metrici e $f: X \to Y$, f si dice **continua** in x se $\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tale che $f(B_\delta(x)) \subset B_\epsilon(f(x))$; f é continua in X se é continua in ogni punto. Ricordiamo che

$$f \quad \text{é continua in} \quad x \quad \text{se e solo se} \qquad x_n \to_n x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$$

f é continua in ogni $x \in X$ se e solo se la preimmagine di un aperto é aperto

SPAZI METRICI COMPLETI, SPAZI DI BANACH

Una **successione** x_n in uno spazio metrico (X,d) si dice **di Cauchy** se

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_\epsilon : \qquad d(x_n, x_m) \leq \epsilon \quad \forall n, m \geq n_\epsilon$$

(X,d) si dice **completo** se ogni successione di Cauchy in X é convergente in X.

$(V, \|.\|)$ si dice di **Banach** se, come spazio metrico, é completo:

$$x_n \in V,\ \|x_n - x_m\| \leq \epsilon \text{ per } n,m \text{ grandi} \quad \Rightarrow \quad \exists x \in V : \quad \|x_n - x\| \to_n 0.$$

ESEMPI.
1. Un sottoinsieme chiuso di uno spazio metrico completo é completo (per la metrica indotta).
2. $\mathbf{R}^n$, munito della norma euclidea, é un Banach.

3. $C([a,b],\mathbf{R})$, munito della norma $\quad \|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|dt \quad$ non é completo.

Se ad esempio, $f_n(x) := |x|^{\frac{1}{n}} signx, \quad x \in [-1,1]$, risulta $\int_{-1}^{1} |f_n(x) - signx|dx \to_n 0$ e quindi f_n é di Cauchy in $(C([0,1],\mathbf{R}), \|.\|_1)$, ma il suo limite non é continuo.

4. $C(K,\mathbf{R})$ munito della norma $\quad \|.\|_\infty \quad$ é un Banach.
Prova. Intanto, f_n é di Cauchy in $C(K,\mathbf{R}) \quad \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists n_\epsilon : \ n,m \geq n_\epsilon \qquad \Rightarrow \qquad \sup_{x \in E} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$$

Dunque, se f_n é di Cauchy in $C(K,\mathbf{R})$, per ogni fissato x in E, la successione $n \to f_n(x)$ é di Cauchy, e quindi $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ esiste finito per ogni x in E. Poi, $\forall \epsilon > 0, \quad \exists n_\epsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_{n+p}(x)| + |f_{n+p}(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \forall x \in E$$

se $n \geq n_\epsilon$ e quale che sia $p \in \mathbf{N}$. Fissato $n \geq n_\epsilon$ e mandando p all'infinito in $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon + |f_{n+p}(x) - f(x)| \ \ \forall x \in E$ si ottiene $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \ \ \forall x \in E$ e per ogni $n \geq n_\epsilon$ cioé f_n converge uniformemente ad f, ovvero $\|f_n - f\|_\infty \to_n 0$.

5. Come in 4., segue che lo spazio dei 'cammini continui' $E := C([a,b], \mathbf{R}^m)$ munito della norma della convergenza uniforme $\|\gamma\|_\infty := \max\limits_{[a,b]} \|\gamma(t)\|$ ove $\|\gamma(t)\|^2 = \sum_{i=1}^m |\gamma_i(t)|^2$, é spazio di Banach.

IL TEOREMA DELLE CONTRAZIONI

Sia (X,d) spazio metrico completo, $C \subset X$ chiuso. Sia $T : X \to X$. Se

(i) $T(C) \subset C$
(ii) $\exists k \in (0,1) : \quad d(Tx, Ty) \leq d(x,y) \quad \forall\, x, y \in C$ (T é una **'contrazione'**)

allora $\qquad \exists! x \in C : \qquad Tx = x$

Unicitá: $Tx = x, \quad Ty = y \quad \Rightarrow \quad x = y.$
Infatti,

$$d(x,y) = d(Tx, Ty) \leq k\, d(x,y) \quad \Rightarrow \quad d(x,y) = 0 \quad \text{perché } k \in (0,1).$$

Esistenza. Sia $x_0 \in C$. Consideriamo la successione definita per ricorrenza

$$x_1 := Tx_0, \quad x_2 := Tx_1, \quad \ldots, \quad x_{n+1} := Tx_n$$

Basta provare che x_n é di Cauchy, perché allora, per completezza, esiste x tale che $x_n \to x$ con $x \in C$ perché C é chiuso. Per continuitá $x_{n+1} = Tx_n \to_n Tx$. Siccome é anche $x_{n+1} \to x$ avremo $x = Tx$ (unicitá del limite).

Proviamo dunque che x_n é di Cauchy. É

$$d(x_2, x_1) = d(Tx_1, Tx_0) \leq kd(x_1, x_0)$$

Ugualmente, $d(x_3, x_2) = d(Tx_2, Tx_1) \leq kd(x_2, x_1) \leq k^2 d(x_1, x_0)$. Iterando,

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(Tx_n, Tx_{n-1}) \leq kd(x_n, x_{x_{n-1}}) \leq k^n d(x_1, x_0) \quad \forall\, n$$

Dunque $\qquad d(x_{n+p+1}, x_n) \leq d(x_{n+p+1}, x_{n+p}) + \ldots + d(x_{n+1}, x_n) \leq$

$$\leq \left[k^{n+p} + \ldots + k^n\right] d(x_1, x_0) \leq k^n \left[\sum_{j=0}^{\infty} k^j\right] d(x_1, x_0) \ \to_n 0$$

UN ESEMPIO. $f \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ tale che $|f'(x)| \leq L < 1 \quad \forall x \in \mathbf{R}$.

ESEMPI COMPLEMENTI ED ESERCIZI

ESEMPI

1. $l^p := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} | \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty\}$ é, se $p \geq 1$, il sottospazio (lineare) di l^∞ delle **successioni di potenza p-esima sommabile**. Una norma su l^p é data da

$$\|x\|_p := \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Per vedere che $\|.\|_p$ é effettivamente una norma basta verificare la diseguaglianza triangolare. Intanto, vale la **diseguaglianza di Holder**: se $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ allora

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\, |y(n)| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^q\right]^{\frac{1}{q}} \quad \forall\, x \in l^p,\ y \in l^q$$

Infatti, dalla diseguaglianza di convessitá

$$p, q > 1, \quad \tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad |xy| \leq \tfrac{|x|^p}{p} + \tfrac{|y|^q}{q} \quad \forall x, y \in \mathbf{R},$$

segue

$$\frac{|x(n)|}{\|x\|_p} \frac{|y(n)|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x(n)|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y(n)|^q}{\|y\|_q^q} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \text{e quindi} \quad \frac{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)\, |y(n)|}{\|x\|_p\, \|y\|_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Siccome $q = \frac{p}{p-1}$, da Holder deduciamo che

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1} |x(n)|\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^{p-1} |y(n)|\right) \leq$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|x\|_p + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \|y\|_p$$

e quindi

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n) + y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

cioé la diseguaglianza triangolare, qui anche detta **diseguaglianza di Minkowskii**.

2. (la funzione 'distanza da un punto' é continua) Fissato $x_0 \in X$ spazio metrico, la funzione 'distanza da x_0',

$$d_{x_0} : X \to \mathbf{R}, \qquad d_{x_0}(x) := d(x, x_0)$$

é Lipschitziana (e quindi continua) perché

$d(x,x_0) \le d(x,y) + d(x_0,y), \qquad d(y,x_0) \le d(x,y) + d(x,x_0) \qquad \Rightarrow$

$$|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \le d(x,y)$$

In particolare ció implica che $\overline{B}_r(x_0) := \{x \in X : \ d_{x_0}(x) = d(x,x_0) \le r\}$ ('palla chiusa' di centro x_0 e raggio $r > 0$) é un insieme chiuso, grazie alla seguente proprietá: se X, Y sono spazi metrici e $f : X \to Y$ é continua , allora

$O \subset Y$ **aperto,** $F \subset Y$ **chiuso** $\Rightarrow f^{-1}(O)$ **é aperto e** $f^{-1}(F)$ **é chiuso**

Infatti $x_n \in f^{-1}(F), x_n \to_n x \Rightarrow f(x_n) \in F$ e $f(x_n) \to_n f(x) \Rightarrow x \in f^{-1}(F)$ cioé $f^{-1}(F)$ é chiuso. L'altra affermazione segue dal fatto che $[f^{-1}(O)]^c = f^{-1}(O^c)$.

3 (diseguaglianza di Cauchy-Schwartz). $b(f,g) := \int_a^b f(t)g(t)dt$ é un prodotto scalare in $C([a,b],\mathbf{R})$ e vale quindi la diseguaglianza di Cauchy-Schwartz

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \le \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

Inoltre, $C([a,b],\mathbf{R})$, munito della norma $\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ non é completo.

4 (diseguaglianza di Holder). Vale la piú generale diseguaglianza di Holder: se $p,q > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, allora

$$|\int_a^b f(t)g(t)dt| \le \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(t)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \forall f,g \in C([a,b],\mathbf{R})$$

5. $l^p, \quad p \ge 1$ é completo.

6. l^∞ é completo.

7: (lo spazio $C_{2\pi}(\mathbf{R},\mathbf{C})$) Sia $C_{2\pi}$ lo spazio vettoriale su $\mathbf{C}$ delle funzioni $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue e 2π periodiche. Allora $\|f\|_\infty := \sup_{t \in \mathbf{R}} |f(t)|$ é una norma su $C_{2\pi}$, che, munito di tale norma, risulta completo.

Inoltre, $\|f\|_2 := \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$ é una norma su $C_{2\pi}$ e vale Cauchy-Schwartz:

$$|\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}dt| \leq \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

COMPLEMENTI.

1. Date due qualsiasi norme p_1, p_2 su $\mathbf{R}^n$, queste sono tra loro equivalenti, nel senso che

$$p_1(x_k) \to_k 0 \quad \Leftrightarrow \quad p_2(x_k) \to_k 0$$

Possiamo supporre : $p_2 = \|.\|_2$ (norma euclidea) e scriviamo $p := p_1$. Indicata con e_i la base canonica di $\mathbf{R}^n$, si ha $x = \sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$ ($< .,. >$ denota l'usuale prodotto scalare). Intanto $\|x_k\|_2 \to 0 \quad \Rightarrow$

$$< x_k, e_i > \to_k 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad p(x_k) = p(\sum_{i=1}^n < x, e_i > e_i) \leq \sum_{i=1}^n | < x_k, e_i > | p(e_i) \to_k 0$$

In particolare, p é continua su $(\mathbf{R}^n, \ \|.\|_2)$. Per il Teorema di Weierstrass, p ha minimo su $\{\|x\|_2 = 1\}$ e quindi $m := \inf\limits_{\{\|x\|_2=1\}} p(x) > 0$ e quindi

$$p(x) = \|x\|_2 p(\tfrac{x}{\|x\|_2}) \geq \quad m\|x\|_2 \quad \text{e quindi} \quad p(x_k) \to_k 0 \quad \Rightarrow \quad \|x_k\|_2 \to 0.$$

2. Convoluzione in $C_{2\pi}$:

$$(f * g)(t) := \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s)ds, \qquad \forall f, g \in C_{2\pi}$$

Provare che, se $g_k \in C_{2\pi}$ sono tali che
(i) $g_k(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}$
(ii) $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} g_k(t)dt = 1 \quad \forall k \in \mathbf{N}$
(iii) $g_k \to_k 0$ uniformemente in $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi] \qquad \forall \delta \in (0, \pi)$
allora

$$\|f * g_k - f\|_\infty \to_k 0 \qquad \forall f \in C_{2\pi}$$

Prova. $|(f * g_k)(t) - f(t)| = \frac{1}{2\pi} | \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g_k(s)ds - \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)g_k(s)ds| \leq$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\delta}^{\delta} |f(t-s) - f(t)|g_k(s)ds + 2\|f\|_\infty \epsilon \qquad \forall k \geq k(\delta)$. Se si é scelto δ abbastanza piccolo di modo che $|s| \leq \delta, t \in [-\pi, \pi] \Rightarrow |f(t-s) - f(t)| \leq \epsilon$ (possibile perché f, essendo continua e periodica é uniformemente continua in $\mathbf{R}$), si conclude che

$$|(f * g_k)(t) - f(t)| \leq \epsilon(1 + 2\|f\|_\infty)$$

3. Provare che (i)-(ii)-(iii) sono soddisfatte da

$$g_k(t) = c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k = c_k \left(\frac{1 + \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}{2}\right)^k$$

se $c_k = \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k\right)^{-1}$. Chiaramente vi é solo da provare (iii).

Stimiamo c_k: $\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt = 1$, e, per paritá, $1 = \frac{c_k}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k dt \geq$

$$\geq \frac{c_k}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t dt = \frac{2c_k}{\pi(k+1)} \qquad \text{e quindi} \qquad c_k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}$$

Infine,

$$|t| \in [\delta, \pi] \quad \Rightarrow c_k \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \leq c_k \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \leq \frac{\pi(k+1)}{2}\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^k \to_k 0$$

4. Densitá dei polinomi trigonometrici in $C_{2\pi}$.

Sono polinomi trigonometrici le funzioni in $C_{2\pi}$ della forma

$$P_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int}, \qquad c_n \in \mathbf{C}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad N \in \mathbf{N}$$

Si ha che

$$\forall f \in C_{2\pi} \quad \exists P_N, \quad \text{polinomi trigonometrici tali che} \quad \|P_N - f\|_\infty \to_N 0$$

Visti 2. e 3., basta osservare che $\quad f \in C_{2\pi}, \quad P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \quad \Rightarrow$

$$(f * P_N)(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} c_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{in(t-s)} ds = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left[c_n \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds\right] e^{int}$$

cioé la convoluzione di una $f \in C_{2\pi}$ con un polinomio trigonometrico é un polinomio trigonometrico.

5. SVILUPPI IN SERIE DI FOURIER

Polinomi e serie trigonometriche Dati $a_0, a_n, b_n \in \mathbf{R}$, possiamo loro associare il *polinomio trigonometrico*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad t \in \mathbf{R} \qquad (1)$$

che, posto $c_0 = a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$ se $n \geq 1$ e $c_{-n} = \overline{c_n} = a_n + ib_n$ si scrive anche

$$\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{int} \qquad t \in \mathbf{R} \qquad (2)$$

Piú in generale, i c_n in (2) potranno essere arbitrari numeri complessi.
Se $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n| < \infty$, allora $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ converge, uniformemente, per $|z| \leq 1$. In particolare é definita la funzione o *serie trigonometrica*

$$f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int} \qquad \forall t \in \mathbf{R} \qquad (3)$$

Come limite uniforme, f é continua, ed inoltre f é 2π-periodica: $f \in C_{2\pi}$.
In generale, f é a valori complessi; f é a valori reali se $c_{-n} = \overline{c_n}$. Notiamo che

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i(k-n)t}\right)dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n)t}dt = c_n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$$

perché, dato che la convergenza in (3) é uniforme, si puó integrare termine a termine; inoltre $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = 0$ se $n \neq m$, $\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)t}dt = 2\pi$ se $n = m$
(ove $\int_a^b(\alpha(t) + i\beta(t))dt := \int_a^b \alpha(t)dt + i\int_a^b \beta(t)dt)$. Dunque, la somma di una serie trigonometrica $f(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ si puó scrivere

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt\right)e^{int}$$

Definizione. Data $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$, restano definiti

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \qquad n \in \mathbf{Z} \qquad \textbf{(coefficenti di Fourier) di} \quad f$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \textbf{(serie di Fourier) di} \quad f$$

La f, si dice **sviluppabile in serie di Fourier** se

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \qquad \forall \quad t \in \mathbf{R}$$

FATTO. Non tutte le $f \in C_{2\pi}$ sono sviluppabili in serie di Fourier.

Vogliamo mostrare che

Teorema 1. $f \in C_{2\pi}$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \;\Rightarrow\; f$ *é sviluppabile in serie di Fourier.*

La ragione é che $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty \quad \Rightarrow \quad g(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int}$ é in $C_{2\pi}$ ed ha gli stessi coefficenti di Fourier di f. La conclusione viene dal

Principio di identitá. *Siano $f, g \in C_{2\pi}$. Se $\hat{f}_n = \hat{g}_n \quad \forall n \in \mathbf{Z}$, allora $f \equiv g$.*

Il Principio di Identitá é, a sua volta, conseguenza di quanto provato al punto 4. dei Complementi, ovvero del

Lemma di densitá. *Data $f \in C_{2\pi}$ esiste una successione di polinomi trigonometrici P_n convergente uniformemente a f in $\mathbf{R}$.*

Deduciamo il Principio di Identitá dal Lemma di Densitá . Siano $P_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k}\, e^{ikt}$ (ove, per ogni$n$, esiste k_n tale che , $c_{n,k} = 0$ se $k \geq k_n$) tali che $\|P_n - f\|_\infty \to_n 0$ e quindi

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_n(t) g(t) dt \to_n \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) dt \qquad \forall g \in C_{2\pi}$$

Siccome $\int_{-\pi}^{\pi} P_n(t)\overline{f(t)} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\overline{f(t)} dt = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k}\overline{\hat{f}_k} = 0$ per ogni n, concludiamo che

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{f(t)} dt = \lim_n \int_{-\pi}^{\pi} P_n(t)\overline{f(t)} dt = 0$$

e quindi $f \equiv 0$.

Teorema 2. *Ogni $f \in C^1_{2\pi}$ é sviluppabile in serie di Fourier.*

Visto il Teorema 1, basterá mostrare che $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| < \infty$. Osserviamo intanto che, per periodicitá, $0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (f(t)e^{-int})' \, dt = \hat{f'}_n - i\,n\ \hat{f}_n$ e quindi

$$\hat{f}_n = -\frac{1}{n}\hat{f'}_n \qquad \forall n \in \mathbf{Z}$$

Il Teorema 2 segue allora dalla

Diseguaglianza di Bessel. Sia $f \in C_{2\pi}$. Allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

Infatti, se $f \in C^1_{2\pi}$, allora

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} |\hat{f'}_n| \le \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f'}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le C \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f'(t)|^2 dt$$

Prova della diseguaglianza di Bessel Sia $P_N = \sum\limits_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}$. Intanto

$$\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\overline{P_N} dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |P_N|^2 dt$$

giacché $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\, \overline{\sum\limits_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}} dt = \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}_n} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \sum\limits_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}_n} \hat{f}_n = \sum\limits_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2$
e $\int\limits_{-\pi}^{\pi} |P_N|^2 dt = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\sum\limits_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int} \right) \left(\sum\limits_{n=-N}^{N} \overline{\hat{f}_n} e^{-int} \right) dt = 2\pi \sum\limits_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2$. Ed allora

$$\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f\overline{P_N} dt \le \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |P_N|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(2\pi \sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e quindi

$$\left(\sum_{n=-N}^{N} |\hat{f}_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

ESERCIZI

1. La chiusura di l^1 in l^∞ é $c_0 := \{x \in l^\infty | \quad x(n) \to_n 0\}$.
Infatti c_0 é chiuso perché se $x_j \in c_0$ e $\|x_j - x\|_\infty \to_j 0$ ovvero $\sup\limits_n |x_j(n) - x(n)| \leq \epsilon$ per $j \geq j_\epsilon$ allora $|x(n)| \leq |x(n) - x_{j_\epsilon}(n)| + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon + |x_{j_\epsilon}(n)| \leq 2\epsilon$ se n é tale che $|x_{j_\epsilon}(n)| \leq \epsilon$ ovvero per tutti gli n abbastanza grandi e quindi $x \in c_0$. Ma se $x \in c_0$ e $x_j(n) := x(n)$ se $n \leq j$ e $x_j(n) = 0$ se $n > j$, allora $\|x - x_j\|_\infty = \sup\limits_{n>j} |x(n)| \to_j 0$.

2. Sia $e_i : j \to \delta_{ij}, i, j \in \mathbf{N}$. Sia X la varietá lineare generata dagli e_i.
Provare che la chiusura di X in l^∞ é c_0.

3. Sia X come in 2. Provare che X é densa in l^p per ogni p.
Infatti, se $x \in c_0$, sia $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$. Allora $\|x - x_n\|_\infty = \sup\limits_{j>n} |x(j)| \to_n 0$.
Poi, dato $x \in l^p$, se $x_n := \sum_{j=1}^n x(j)e_j$, allora $\|x - x_n\|^p = \sum_{j>n} |x(j)|^p \to_n 0$.

4. Sia $E = C([a, b], \mathbf{R})$ dotato dell norma $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[a,b])} |f(x)|$.
Provare che la funzione (lineare in $f \in C([a, b])$)

$$l(f) := \int_a^b f(x)dx$$

é definita su E ed é continua da E ad $\mathbf{R}$.

5. Sia $k \in C([a, b] \times [c, d])$. Per ogni $f \in c([a, b])$ la funzione

$$(Tf)(t) := \int_a^b k(x, t)f(x)dx$$

é, in virtú del teorema sugli integrali dipendenti da parametro, una funzione continua in $[c, d]$. Inoltre

$$\|Tf - Tg\|_\infty = \sup_{x\in[a,b])} |\int_a^b k(x, t)[f(x) - g(x)]dx| \leq \left(\sup_{(x,t)\in[a,b]\times[c,d])} |k(x, t)| \right) \|f - g\|_\infty$$

Dunque T é una funzione (lineare) e Lipschitziana (e quindi continua) da $C([a, b], \mathbf{R})$ a $C([c, d], \mathbf{R})$ dotati della norma della convergenza uniforme.