# AM2 2010-2011: APPELLO A

**TEMA 1** Provare che in $\mathbf{R}^n$ valgono le seguenti proprietá

(i) ogni aperto é unione numerabile di palle aperte

(ii) se $O_\alpha$ sono sottoinsiemi aperti, allora esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup\limits_\alpha O_\alpha = \bigcup\limits_j O_{\alpha_j}$

(iii) se $K$ é chiuso e limitato allora da ogni ricoprimento aperto di $K$ si puó estrarre un sottoricoprimento finito.

Le proprietá (i)-(ii)-(iii) valgono in tutti i Banach ?

**TEMA 2** . Sia $u \in \mathbf{R}^n$, $f \in C^2(B_r(u))$. Provare che

$$\nabla f(u) = 0, \quad < H_f(u)h, h > > 0 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n, h \neq 0, \quad \Rightarrow \quad u \quad \text{é minimo locale.}$$

Mostrare con un esempio che in un punto di minimo locale puó accadere che $< H_f(u)\, h, h > \, = 0$ per qualche $h \in \mathbf{R}^n$, $h \neq 0$.

**TEMA 3**. Siano $f, g \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$.

Provare che se $f$ e $g$ hanno gli stessi coefficenti di Fourier allora $f \equiv g$. Dedurre che se la successione dei coefficenti di Fourier di $f \in C_{2\pi}$ sta in $l^1$ allora $f$ é somma della propria serie di Fourier.

**TEMA 4**. Sia $f \in Lip_{loc}(O, \mathbf{R}^n)$ , $O$ aperto di $\mathbf{R}^n$. Sia $\overline{B_{2r}(x_0)} \subset O$. Siano

$$M := \sup_x \|f(x)\|, \quad k := \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|}, \quad x, y \in \overline{B_{2r}(x_0)}.$$

Provare che, se $\delta < min\{\frac{1}{k}, \frac{r}{M}\}$, allora

$$\forall x \in B_r(x_0) \ \exists!\, \gamma^x \in C^1((-\delta, \delta), O) : \qquad \gamma^x(0) = x, \quad \dot\gamma^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (\delta, \delta)$$

**TEMA 5**. Siano $a_{ij} \in C(\mathbf{R})$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\mathcal{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Provare che l'insieme delle soluzioni del sistema differenziale lineare

$$\dot x = \mathcal{A}x$$

é un sottospazio lineare di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ di dimensione $n$.

**ESERCIZIO 1**. Calcolare

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \frac{1}{(1+\|x\|^2)^{\frac{n-2}{2}}}, \qquad x \in \mathbf{R}^n$$

**ESERCIZIO 2**.

Sia $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2+y^2-2xy^2)$.

Provare (anche usando argomenti alla Weierstrass) che $f$ ha almeno quattro punti stazionari. Provare a determinarli.

**ESERCIZIO 3**.

Sia $f \in C_{2\pi}(\mathbf{R})$. Sia $p$ un polinomio trigonometrico. Sia

$$(f * p)(t) := \int_{-\pi}^{\pi} f(s)p(t-s)ds$$

Provare che $f * p$ é un polinomio trigonometrico.

**ESERCIZIO 4**.

Stabilire l'intervallo di esistenza della soluzione del problema di Cauchy

$$\dot{x} = (x^2 - 2x - 3)\log^2(x^2) \qquad x(0) = x_0$$

in dipendenza dal dato iniziale $x_0$.

**ESERCIZIO 5**. Trovare l'integrale generale di

$$x^{(5)} - 5x^{(4)} + 10x^{(3)} - 10x^{(2)} + 5x' - x = e^t$$