AM2-2009-10: Tracce delle lezioni- IV Settimana

DIFFERENZIABILITÁ E MATRICE JACOBIANA

Siano O aperto in $\mathbf{R}^n$, $f : O \to \mathbf{R}^m$. Si dice che f é **differenziabile** in $x_0 \in O$ se esiste $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (cioé L é trasformazione lineare di $\mathbf{R}^n$ in $\mathbf{R}^m$) tale che

$$f(x_0 + h) \; = \; f(x_0) + Lh + \circ(\|h\|) \qquad (*)$$

Tale L, *se esiste é unica*. Infatti: $\quad (L_1 - L_2)(h) = \circ(\|h\|) \quad \Rightarrow$
$t(L_1 - L_2)(h) = (L_1 - L_2)(th) = \circ(|t|) \quad \Rightarrow \quad (L_1 - L_2)(h) = 0 \quad \forall h.$
Notiamo inoltre che, essendo L continua, f **é continua in** x_0.

La trasformazione L in $(*)$ si chiama **differenziale** di f in x_0 e si indica $df(x_0)$.

La sua matrice rappresentativa $\quad (< Le_j, \hat{e}_i >)_{i,j} \quad$ (nelle basi canoniche e_j, $\quad \hat{e}_i$, $j = 1, \ldots, n, \quad i = 1, \ldots, m$) si chiama **matrice Jacobiana** e si indica $J_f(x_0)$.

n=1: Cammini differenziabili. Sia $\quad \gamma : (a, b) \to \mathbf{R}^m, \quad \gamma_i :=< \gamma, \hat{e}_i >$, cioé $\gamma = \sum_{i=1}^m \gamma_i \hat{e}_i$. Il 'cammino' γ risulta differenziabile in $t \in (a, b)$ se esiste un vettore $v = \sum_{i=1}^m v_i \hat{e}_i$ tale che $\quad \gamma(t + \tau) = \gamma(t) + \tau v + \circ(\tau), \quad$ ovvero

$$\forall i = 1, \ldots, m \qquad \exists \quad \dot{\gamma}_i(t) := \lim_{\tau \to 0} \frac{\gamma_i(t + \tau) - \gamma_i(t)}{\tau} = v_i$$

Il vettore v, che si indica con $\dot{\gamma}$, é il **vettore tangente** al cammino γ in $\gamma(t)$. I cammini dotati di vettore tangente si chiamano differenziabili.

UN ESEMPIO $\gamma(t) = (\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi)$ (equazione parametrica della circonferenza unitaria) é cammino differenziabile con $\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t)$. Notiamo che $< \gamma(t), \dot{\gamma}(t) > \equiv 0$ e quindi, come si vede subito, $\dot{\gamma}(t)$, applicato in $\gamma(t)$, é vettore tangente (di lunghezza 1: é il *versore*) alla circonferenza nel punto $\gamma(t)$.

m=1: Derivate direzionali, derivate parziali. Sia $f : O \to \mathbf{R}$ differenziabile

in $x \in O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Dati $h \in \mathbf{R}^n, t \in \mathbf{R}$, sia $\varphi(t) := f(x + th)$. $\quad$ Da
$\frac{\varphi(t+\tau)-\varphi(t)}{\tau} = \frac{f(x+th+\tau h)-f(x+th)}{\tau} = df(x + th)(h) + \circ(1)$ se $|t| \leq \delta_h$ $\quad$ segue che esiste
$$\frac{\partial f}{\partial h}(x + th) := \frac{d}{dt} f(x + th) = \varphi'(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x + th + \tau h) - f(x + th)}{\tau} = df(x + th)h$$
Tale quantitá si chiama **derivata di** f **in** x **nella direzione** h. In particolare,

$$\exists \quad \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) := \lim_{t \to 0} \frac{f(x + te_j) - f(x)}{t} = df(x)e_j$$

$\frac{\partial f}{\partial x_j}$ (che si scrive anche $f_{x_j}, \partial_j f, D_j f, \ldots$) si chiama **derivata parziale** di f fatta rispetto alla j-esima variabile. Il vettore

$$\nabla f(x) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

si chiama **gradiente** di f in x, ed é il vettore che rappresenta $df(x)$:

$$df(x)h = < \nabla f(x) , h >= \frac{\partial f}{\partial h}(x)$$

Se $\mathbf{m > 1}$, f differenziabile in x_0 $\Leftrightarrow$ $\frac{\|f(x_0+h) - [f(x_0)+df(x_0)h]\|}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0$ $\Leftrightarrow$ $\frac{f_i(x_0+h) - [f_i(x_0)+<df(x_0)h,\hat{e}_i>]}{\|h\|} \to_{\|h\|\to 0} 0 \quad \forall i$ $\Leftrightarrow$ f_i sono differenziabili con

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = df_i(x_0)e_j =< df(x_0)e_j, \hat{e}_i > \quad \text{e quindi} \quad J_f(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij}$$

ovvero, $J_f(x_0)$ é la matrice che ha per righe i vettori $\nabla f_i(x_0)$.

Funzioni $C^1(O)$. Una funzione é $C^1(O)$ se le sue derivate parziali esistono e sono continue in O; $f = (f_1, \ldots, f_m)$ é di classe $C^1(O)$ se lo sono le f_i.

Proposizione 1. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f **é differenziabile**.
Prova. Basta mostrarlo per funzioni scalari. Per semplicitá, lo dimostriamo per funzioni di due variabili. Da f_x, f_y continue segue

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta = \delta_\epsilon > 0 : \quad |\frac{\partial f}{\partial x}(w) - \frac{\partial f}{\partial x}(v)| + |\frac{\partial f}{\partial y}(w) - \frac{\partial f}{\partial y}(v)| \leq \epsilon \qquad \forall\, w, v \in B_\delta(u)$$

Applicando il Teorema Fondamentale del Calcolo a $\frac{d}{d\tau} f(\tau, y+t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t)$ e a $\frac{d}{d\tau} f(x, \tau) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tau)$ otteniamo

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x,y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right] \right| =$$

$$\left| f(x+s, y+t) - f(x, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)s + f(x,y+t) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)t \right| \leq$$

$$\left| \int_x^{x+s} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, y+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \right] d\tau \right| + \left| \int_y^{y+t} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,\tau) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right] d\tau \right|$$

$$\leq \epsilon \left(|s| + |t| \right) \qquad \text{se} \quad s^2 + t^2 \leq \delta_\epsilon^2$$

CONSIDERAZIONI GEOMETRICHE

Caso **n=1**. Sia dapprima γ grafico cartesiano in $\mathbf{R}^2$:

$$\gamma(t) = (t, f(t)),\ t \in (a,b) \qquad \gamma((a,b)) = \mathcal{G}_f$$

La differenziabilitá di γ equivale alla derivabilitá di f. I punti

$\gamma(t) + \tau\dot{\gamma}(t) = (t+\tau, f(t) + \tau f'(t)), \quad \tau \in \mathbf{R}$ sono i punti della retta tangente a γ:

eliminando il parametro τ troviamo infatti $y = f(t) + f'(t)(x-t)$. $\dot{\gamma}$ é in tal senso vettore tangente in $\gamma(t)$ a γ.
Piú in generale, γ é differenziabile in t significa che $\gamma(t+\tau) - [\gamma(t) + \tau\dot{\gamma}(t)] = \circ(\tau)$, cioé la curva γ é approssimata, con un errore di ordine superiore al primo, dalla retta $\mathbf{R}\dot{\gamma}(t)$ traslata in $\gamma(t)$, che é quindi la retta tangente a γ in $\gamma(t)$.

Caso **m=1**. L'esistenza della derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial h}(x)$ equivale alla differenziabilitá del cammino $\gamma(t) = (x+th, f(x+th))$ risultando $\dot{\gamma}(t) = (h, \frac{\partial f}{\partial h}(x))$. La curva γ é l'intersezione del grafico di f con il piano (in $\mathbf{R}^3$ se $n=2$) passante per $(x, f(x))$ e per la retta $x + \mathbf{R}h$; il vettore $(h, \frac{\partial f}{\partial h}(x))$, applicato in $(x, f(x))$ é vettore tangente a tale retta, e quindi al grafico di f, $\mathcal{G}_f$. Al variare di h si ottengono tutti i vettori tangenti al grafico. Siccome $\frac{\partial f}{\partial h}(x) =< \nabla f(x)\,,\ h\ >$, l'insieme di tali vettori,

$$\{(h, < \nabla f(x)\,,\ h\ >): \quad h \in \mathbf{R}^n\}$$

descrive un piano che, traslato in $(x, f(x))$, é il piano tangente a $\mathcal{G}_f$ in $(x, f(x))$.
Ció si legge direttamente in $\quad f(x) = f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0 > + \circ(\|x - x_0\|)$ $(x := x_0 + h,)$: il 'piano' $\quad T_f(x_0) := \{(x, f(x_0) + < \nabla f(x_0), x - x_0\ >)\}$ approssima il grafico di f, in un intorno di $(x_0, f(x_0))$, con un errore di ordine superiore al primo: $\quad T_f(x_0)$é il **piano tangente a** $\mathcal{G}_f$ **in** $(x_0, f(x_0))$.
Sezionando $\mathcal{G}_f$ e $T_f(x_0)$ con il piano $z = f(x_0)$ e proiettando tali sezioni sul piano $z = 0$, otteniamo la *curva di livello* $\{x : \ f(x) = f(x_0)\}$ e la corrispondente **'retta' tangente** in x_0, data appunto da $\quad < \nabla f(x_0), x - x_0\ >= 0$. Il gradiente di f in x_0 é quindi *ortogonale* alle curve di livello ed é direzione di massima pendenza del grafico di f in $(x, f(x))$:

$$\frac{d}{dt} f(x+th) =< \nabla f(x+th), h > \qquad \text{e} \qquad \sup_{\|h\|=1} < \nabla f(x), h >= \|\nabla f(x)\|$$

Se **n=k** $\leq$ **m**, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ parametrizza una $k-$superfice in $\mathbf{R}^m$. Le curve su tale superfice, date da $t \to f(t, x_2, \ldots, x_n), \ldots, t \to f(x_1, \ldots, t)$ determinano k vettori tangenti alla k-superfice, le k colonne di J_f, che indichiamo $\frac{\partial f}{\partial x_j} = (\frac{\partial f_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j})$.

Derivate parziali e differenziabilitá: esempi e controesempi

(i) $\quad f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, se $x^2+y^2 \neq 0$, $\quad f(0,0)=0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha anche derivate parziali, nulle, in $(0,0)$. Ma $\frac{\partial f}{\partial h}$ non esiste per alcun $h \neq e_i, i=1,2$, perché $t \to f(tx,ty)$ non é continua in $t=0$ (a meno che non sia $xy=0$). In particolare, f non é continua in zero:

una funzione puó avere derivate parziali in un punto senza essere continua in quel punto.

Notiamo che: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \frac{1}{y}\ \forall y \neq 0$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial x}$ non é continua in $(0,0)$.

(ii) $\quad f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$, $\quad f(0,0) = 0$.

É $\frac{f(tx,ty)}{t} = \frac{x^2y}{t^2x^4+y^2} \to_{t\to 0} \frac{x^2}{y}$ e quindi $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \frac{h_1^2}{h_2}$ $\forall\, h=(h_1,h_2) \in \mathbf{R}^2$. Siccome $f(x,x^2) \equiv \frac{1}{2}$, vediamo che

una funzione puó essere derivabile, in un punto, lungo tutte le direzioni senza essere continua in quel punto.

(iii) $\quad f(x,y) = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$, se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$

é di classe $C^1(\mathbf{R}^2 \setminus (0,0))$ ed ha derivate parziali, nulle, anche in $(0,0)$. Inoltre, in $(0,0)$, f **é derivabile in tutte le direzioni**: $\frac{\partial f}{\partial h}(0,0) = \lim_t \frac{f(tx,ty)}{t} = \lim_t \frac{tx^3y}{t^4x^6+y^2} = 0$. Tuttavia f **non é continua** in $(0,0)$, perché $f(x,x^3) \equiv \frac{1}{2}$. Dunque

una funzione puó avere derivate nulle lungo tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.

(iv) $\quad f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+y^2}\,x^4y}{x^6+y^2}$ se $x^2+y^2 \neq 0$, $f(0,0)=0$

ha derivata nulla in tutte le direzioni, ed é anche continua, in $(0,0)$, ma non é differenziabile in $(0,0)$, perché $\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y}{x^6+y^2}$ non va a zero al tendere di x^2+y^2 a zero (vale infatti $\frac{1}{2}$ lungo la cubica $y=x^3$). Dunque

una funzione continua puó avere derivate nulle in tutte le direzioni in un punto senza essere differenziabile in quel punto.