AM210 2011-2012: II ESONERO

TEMA 1 (teorema di Picard). Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^n)$. Sia $x \in \mathbf{R}^n$.
A) Provare che esiste $\delta = \delta(x) > 0$ ed una unica $\gamma^x \in C^1((-\delta, \delta), \mathbf{R}^n)$ tali che

$$\gamma^x(0) = x, \qquad \dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta) \qquad (PC)$$

B) Supponiamo, di piú, che esista $C > 0$ tale che $\|df(x)\| \leq C \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$.
(i) Provare che esiste $\gamma^x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ soluzione del problema di Cauchy (PC)
(ii) Provare che esiste una costante $L > 0$ tale che

$$\|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \ \leq \ \|x - y\| \ e^{L|t|} \qquad \forall x, y \in \mathbf{R}^n, \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

TEMA 2 (sistemi differenziali lineari). Siano $a_{ij}, b_i \in C(\mathbf{R}), \quad i, j = 1, \ldots, n$.
A) Indicata $\mathcal{A}(t) = (a_{ij}(t))_{i,j=1,\ldots,n}$, provare che l'insieme

$$\mathcal{N} := \{x \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n) : \quad \dot{x}(t) = \mathcal{A}(t)x(t)\}$$

é un sottospazio vettoriale di $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ di dimensione n.
B) Sia $X(t)$ matrice fondamentale per $\dot{x} = \mathcal{A}x$. Sia $b := (b_1, \ldots, b_n)$. Provare che

$$\overline{x}(t) = X(t) \int_0^t (X(\tau))^{-1} b(\tau) d\tau$$

é soluzione del sistema differenziale $\dot{x} = \mathcal{A}x + b$ e che l'insieme di tutte le soluzioni di tale sistema é dato da

$$\mathcal{N} + \overline{x} = \{\overline{x} + X(t)c : \quad c \in \mathbf{R}^n\}$$

TEMA 3. Sia $f \in C^1_{2\pi}$. Provare che f é somma della propria serie di Fourier.

TEMA 4 . Sia $\varphi \in C_0^\infty, \ \varphi \geq 0, \ \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, dx \ = \ 1, \quad \varphi_\epsilon(x) \ := \ \frac{1}{\epsilon}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$.
Provare che

$$f \in C(\mathbf{R}) \quad \Rightarrow f * \varphi_\epsilon \to_{\epsilon \to 0} f \quad \text{uniformemente in } [-R, R] \text{ quale che sia } R > 0.$$

TEMA 5. Enunciare teoremi su integrali dipendenti da parametro che permettano di provare che per ogni $f \in C([a, b] \times [c, d])$ si ha

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

Fornire quindi una dimostrazione di tale formula.

ESERCIZIO 1. Trovere le soluzioni dei problemi di Cauchy

$$\dot{x} = \sqrt{|1 - x^2|}, \qquad x(0) = x_0 > 0$$

Discutere unicitá/non unicitá ed (eventuale) esistenza globale di tali soluzioni.

ESERCIZIO 2. Sia $l^1 := \{x : \mathbf{N} \to \mathbf{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)| < \infty\}$. Provare che

$$\|x\|_1 := \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|, \qquad \|x\|_\infty := \sup_n |x(n)|$$

sono due norme su l^1. Stabilire, motivando,
(i) se $\|.\|_1$ e $\|.\|_\infty$ sono norme equivalenti
(ii) se l^1, dotato della norma $\|.\|_1$, é completo
(iii) se l^1, dotato della norma $\|.\|_\infty$), é completo.

ESERCIZIO 3. Sia $f \in C_{2\pi}$, con $f(x) = |x|$ in $[-\pi, \pi]$.

(i) Calcolare i coefficenti di Fourier di f e dedurre che la sua serie di Fourier é totalmente convergente in $\mathbf{R}$. Si puó concludere che f coincide in ogni punto con la somma della sua serie di Fourier? Motivare la risposta
(ii) Sia $g = f'$ dove f é derivabile, $g = 0$ altrove. Calcolare i coefficenti di Fourier di g e dire, motivando, se g coincide, e dove, con la somma della sua serie di Fourier. Verificare se la serie di fourier di g si ottiene derivando termine a termine la serie di Fourier di f. Dire, giustificando, se il risultato trovato era prevedibile.

ESERCIZIO 4. Trovare, tra le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale

$$x^{(10)} - 2x^{(5)} + x = 2e^{-t}$$

quelle, se esistono, che hanno limite finito a $+\infty$.

ESERCIZIO 5. Stabilire se il sistema differenziale 2×2

$$\dot{x} = x \sinh(x^2 + y^2), \qquad \dot{y} = y \sinh(x^2 + y^2)$$

é o non é di tipo gradiente, é o non é di tipo Hamiltoniano.
Usare eventualmente queste informazioni per decidere , in modo motivato, se le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi, o tutti i tempi negativi.