AM210: Esercizi 2

Integrali impropri: esercizi

Discutere la convergenza dei seguenti integrali ed eventualmente calcolarli.

$$1.\ \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}\,dx \quad 2.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x+x^3}\,dx \quad 3.\ \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x^3}\,dx$$

$$4.\ \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}\,dx \quad 5.\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\sin x\,dx \qquad 6.\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\sin^2 x\,dx$$

$$7.\ \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\cos^2 x\,dx \quad 8.\ \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^3 x} \quad 9.\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x} \quad 10.\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

Gli integrali **1-7 sono assolutamente convergenti**: gli integrandi sono continui nei rispettivi intervalli di integrazione e vanno a zero per x tendente all'infinito, in 1-4 come $\frac{1}{x^p}$, con, rispettivamente, $p = 2, 3, 3, 2$, mentre in 5-6-7 decadono in modo esponenziale. Effettuiamo ora il calcolo.

1. $\int_2^M \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}\,dx \;=\; -\int_2^M \left(\frac{d}{dx}\frac{1}{\sqrt{x^2-3}}\right)\,dx \;=\; -[\frac{1}{\sqrt{M^2-3}} - 1] \to_{M\to+\infty} 1.$

2. $\int_1^M \frac{1}{x+x^3}\,dx \;=\; \int_1^M \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\,dx \;=\; \log\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,|_1^M \;\to_{M\to+\infty}\; \log\sqrt{2}.$

3. $\int_1^M \frac{1}{x^2+x^3}\,dx \;=\; \int_1^M \frac{1}{1+x} + \frac{1-x}{x^2}\,dx \;=\; [\log\frac{1+x}{x} - \frac{1}{x}\,]_1^M \;\to_{M\to+\infty}\; 1 - \log 2.$

4. Posto $4x^2+1 = t$, si ha $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(4x^2+1)^3}}\,dx \;=\; \frac{1}{8}\int_1^{+\infty} t^{-\frac{3}{2}}\,dt \;=\; \frac{1}{4}.$

5. Siccome l'integrale é convergente, basta calcolare, per esempio,

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^{2k\pi} e^{-x}\,\sin x\,dx$$

Integrando due volte per parti, troviamo

$$\int_0^{2k\pi} e^{-x}\,\sin x\,dx \;=\; \int_0^{2k\pi} e^{-x}\,\cos x\,dx \;=\; -\int_0^{2k\pi} e^{-x}\,\sin x\,dx \;+ (1-e^{-2k\pi})$$

e quindi

$$\int_0^{2k\pi} e^{-x}\,\sin x\,dx \;=\; \frac{1+e^{-2k\pi}}{2} \;\to_{k\to+\infty}\; \frac{1}{2}$$

6-7. Intanto, $1 =: \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\sin^2 x + \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos^2 x\,dx$. Poi, integrando due volte per parti, troviamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\sin^2 x\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,\sin(2x)\,dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\cos(2x)\,dx$$

Siccome $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$ deduciamo

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,\sin^2 x\,dx = \frac{2}{5} \qquad\qquad \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos^2 x\,dx = \frac{3}{5}$$

In **8-10 il criterio asintotico é insufficente** e occorre argomentare direttamente:

8. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\log^3 x} = -\frac{1}{2}\log^{-2} x\,|_2^{+\infty} = \frac{1}{2\log^2 2}$

9. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sin^2 x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x} = +\infty$

10. Integrando per parti,

$$\int_\pi^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x}dx = \int_\pi^{k\pi} \frac{1}{2x^2}(x-\sin x\,\cos x)dx = \int_\pi^{k\pi} \frac{dx}{2x} - \int_\pi^{k\pi} \frac{\sin 2x}{4x^2}dx \to_{k\to+\infty} +\infty$$

perché $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} |\frac{\sin x\,\cos x}{2x^2}|\,dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1}{2x^2}\,dx < +\infty$.

Od anche: $$\int_\pi^{k\pi} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx \geq \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\pi}\int_\pi^{k\pi} \sin^2 x\,dx = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2k} \to_{k\to+\infty} +\infty$$

Discutere ora la **convergenza/assoluta convergenza** dei seguenti integrali:

$$1.\ \int_2^{+\infty} \frac{1-4\sin x}{x^3+\sqrt{x}}\,dx, \quad 2.\ \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx \quad 3.\ \int_0^{+\infty} \sin x^\alpha\,dx,$$

$$4.\int_0^{+\infty} \sin(e^x)\,dx, \quad 5.\ \int_0^{+\infty} x\,\sin x^4\,dx \quad 6.\ \int_1^{+\infty} \sin(\log x)\,dx$$

1. $|\frac{1-4\sin x}{x^3+\sqrt{x}}| \leq \frac{5}{x^3} \Rightarrow \int_2^{+\infty} |\frac{1-4\sin x}{x^3+\sqrt{x}}|\,dx < +\infty$ per il criterio del confronto.

2. Se $\alpha > 1$, l'integrale é assolutamente convergente per il criterio del confronto.

Sia $0 < \alpha \leq 1$. Integrando per parti,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx \;=\; -\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{M} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\, dx \;-\; \frac{\cos M}{M^\alpha} \quad \to_{M\to+\infty} -\alpha \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

ove l'ultimo integrale converge perché $\alpha + 1 > 1$. Tuttavia la convergenza non é assoluta: $\int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x^\alpha}|\, dx \;\geq\; \int_1^{+\infty} |\frac{\sin x}{x}|\, dx \;=\; +\infty$.

Se $\alpha = 0$, l'integrale non converge. Se $\alpha < 0$, $\beta := -\alpha \;>\; 0$, si ha

$$\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} x^\beta \sin x\, dx \;\geq\; (2k\pi)^\beta \int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi} \sin x\, dx \;=\; 2(2k\pi)^\beta \;\to_{k\to+\infty} +\infty$$

$$\int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} x^\beta \sin x\, dx \;\leq\; [(2k-1)\pi)]^\beta \int_{(2k-1)\pi}^{2k\pi} \sin x\, dx \;=\; -2\,[(2k-1)\pi)]^\beta \;\to_{k\to+\infty} -\infty$$

Dunque, se $\alpha \;<\; 0$, $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\, dx$ non esiste.

3. Per $\alpha = 0$ l'integrale non converge. Per $\alpha > 0$, posto $x^\alpha \;=\; t$, si ottiene

$$\int_0^M \sin x^\alpha\, dx \;=\; \frac{1}{\alpha} \int_1^M \frac{\sin t}{t^{1-\frac{1}{\alpha}}}\, dt$$

che, come visto, converge (ma non assolutamente!) se e solo se $\alpha > 1$.
Infine, se $\alpha \;<\; 0$, $\sin x^\alpha$ si comporta come x^α per x grande, e quindi l'integrale converge (infatti assolutamente) se e solo se $\alpha < -1$.

4. Posto $e^x \;=\; t$, si ottiene $\int_0^{+\infty} \sin(e^x)\, dx \;=\; \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ che converge (ma non assolutamente!).

5. Posto $x^4 = t$, si ha

$$\int_0^{+\infty} x\, \sin x^4\, dx \;=\; \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt$$

che, come visto, converge (ma non assolutamente!).

6. Posto $\log x = t$, si ottiene $\int_1^M \sin(\log x)\, dx \;=\; \int_0^{\log M} e^t\, \sin t\, dt$. Dopo due integrazioni per parti si trova

$$\int_0^{2k\pi} e^t\, \sin t\, dt \;=\; \frac{1 - e^{2k\pi}}{2} \;\to_{k\to+\infty} -\infty$$

INTEGRALI IMPROPRI

INTEGRAZIONE DI FUNZIONI NON LIMITATE

Definizione Sia f integrabile in $[a,x]$ $\forall\, x < b$, $\sup_{[a,b)} |f| = +\infty$. Se $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ esiste

$$\int_a^b f := \lim_{x\to b^-} \int_a^x f$$

si dice **integrale improprio** (o in senso generalizzato) di f su $[a,b]$.
Se tale limite é finito, f si dice **a integrale convergente** (o **integrabile in senso improprio o generalizzato**) su $[a,b]$

Definizione analoga se f, integrabile in $[x,b]$, $\forall x > a$, é non limitata attorno ad a.

NOTA. In generale, $\lim_{x\to b^-} \int_a^x f$ non esisterá. Ad esempio, se $x \in [-\frac{2}{\pi}, 0)$
$\int_{-\frac{2}{\pi}}^x \frac{\sin\frac{1}{t}}{t^2}\, dt = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{1}{x}} \sin\tau\, d\tau = \cos\frac{1}{x}$, non ha limite per x tendente a 0^-.

UN ESEMPIO FONDAMENTALE : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ é convergente $\Leftrightarrow$ $\alpha < 1$

Infatti, $\alpha \neq 1 \Rightarrow \int_x^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}(1 - x^{1-\alpha}) \to_{x\to 0^-} \frac{1}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$ mentre $\frac{1}{1-\alpha}(1-x^{1-\alpha}) \to +\infty$ se $\alpha > 1$. Infine, per $\alpha = 1$ si ha $\int_x^1 \frac{dt}{t} = -\log x \to_{x\to 0^-} +\infty$.

Definizione Sia $x_0 \in (a,b)$, f integrabile in $[a, x_0 - \delta]$, $[x_0 + \delta, b]$, $\forall\, \delta > 0$ piccolo e $\sup_{[a,b)} |f| = +\infty$. Diremo che f é **integrabile (in senso improprio) in** $[a,b]$ se e solo se f é integrabile (in senso improprio) in $[a, x_0]$ ed in $[x_0, b]$ e in tal caso

$$\int_a^b f := \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f$$

sará l'**integrale improprio** di f in $[a,b]$.
Diremo anche che f ha in x_0 una **singolaritá integrabile**.
Ovvia la definizione di $\int_a^b f$ se f ha in $[a,b]$ solo singolaritá integrabili.

ESEMPIO. x_0 é una singolaritá integrabile per $f(x) = \frac{1}{|x-x_0|^\alpha}$ se e solo se $\alpha < 1$.
Infatti, posto $t = x - x_0$, si ha

$$\int_{x_0+\delta}^{x_0+1} \frac{dx}{|x-x_0|^\alpha} = \int_\delta^1 \frac{dt}{t^\alpha}$$

In particolare, le singolaritá delle funzioni razionali sono non integrabili.

Definizione Se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, é integrabile (anche solo in senso improprio) in ogni intervallo limitato, diremo che f é **integrabile in senso generalizzato su R** se esistono $\int_0^{+\infty} f := \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f$ e $\int_{-\infty}^0 f := \lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f$ e scriveremo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f := \int_0^{+\infty} f + \int_0^{+\infty} f$$

Se I é un intervallo illimitato, aperto o chiuso, la definizione di integrabilitá in senso improprio su I si dá in modo analogo.

Esempi.

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx + \int_{-\infty}^0 e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

2. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)} = \pi$. Infatti, posto $t = s^2$, $\int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)} = 2\int_{\sqrt{x}}^1 \frac{ds}{s(1+s^2)} = 2(\arctan 1 - \arctan x) \to_{x\to 0^-} \frac{\pi}{2}$ e $2\int_1^{\sqrt{x}} \frac{ds}{s(1+s^2)} \to_{x\to+\infty} \frac{\pi}{2}$.

Definizione di assoluta integrabilitá. Se $|f|$ é integrabile (in senso improprio) sull'intervallo I, f si dice assolutamente integrabile su I.

NOTA Se f é integrabile in ogni $[a,b] \subset I$, I intervallo aperto, limitato od illimitato, é

$$\int_{\inf I}^{\sup I} |f| = \sup_{[a,b]\subset I} \int_a^b |f|$$

e quindi $\int_{\inf I}^{\sup I} |f|$ esiste sempre, finito od infinito. L'assoluta integrabilitá potrá scriversi nella forma

$$\int_{\inf I}^{\sup I} |f| < +\infty$$

ESEMPIO : $$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{|t^\alpha|} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \alpha < 1$$

Condizioni di integrabilitá.

Criterio del Confronto Siano f, g integrabili in $[a,x]$ $\forall\ x < b$. Allora

(i) $|f(x)| \le |g(x)|$ $\forall x \in [a,b)$, $\int_a^b |g| < +\infty \Rightarrow \int_a^b |f| < +\infty$

(ii) $|g| \leq |f| \;\; \forall x \in [a,b), \;\; \int_a^b |g| = +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^b |f| = +\infty$

Infatti: (i): $\int_a^x |f| \leq \int_a^b |g| \;\; \forall x \in [a,b)$ (ii): $\int_a^x |f| \geq \int_a^x |g| \to_{x\to b^-} +\infty$

Corollario .

(i) $\exists M > 0, \; \alpha > 1 : \;\; 0 \leq |f|(x) \leq \frac{M}{|x-b|^\alpha} \;\; \forall\, x \in [a,b) \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^b |f| < +\infty$

(ii) $\exists M > 0 : \;\; |f|(x) \geq \frac{M}{|x-b|}, \;\; \forall\; x \in [a,b) \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^b |f| = +\infty$

Integrabilitá e comportamento asintotico.

(i) $\exists \alpha > 1 : \;\; |x-b|^\alpha |f(x)| \to_{x\to b^-} c < +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^b |f| < +\infty$

(ii) $|x-b||f(x)| \to_{x\to b^-} c > 0 \;\; \Rightarrow \;\; \int_a^b |f| = +\infty$

I criteri sopra esposti sono infatti **criteri di assoluta integrabilitá**.
La rilevanza dei criteri di confronto é descritta in particolare dal fatto seguente

L'assoluta integrabilitá implica l' integrabilitá

$$\int_a^b |f| < +\infty \;\; \Rightarrow \;\; \exists \;\; \int_a^b f$$

Questo fatto é a sua volta una conseguenza del

Criterio di Cauchy. Sia f integrabile in $[a,x] \;\; \forall\, x < b$. Allora

$$\exists \;\; \int_a^b f \;\; \Leftrightarrow \;\; (\forall \epsilon > 0, \; \exists x_\epsilon : \;\; x_\epsilon \leq x_1 < x_2 < b \;\; \Rightarrow \;\; |\int_{x_1}^{x_2} f| \leq \epsilon)$$

che altro non é che la condizione di Cauchy perché esista finito il limite, per x tendente a b^-, di $F(x) := \int_a^x f$. Infatti : $F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f$.

Ed allora, se $\int_a^x |f| < +\infty$, e quindi $\int_a^x |f|$ soddisfa la condizione di Cauchy, anche $\int_a^x f$ soddisfa la condizione di Cauchy, dato che $|\int_{x_1}^{x_2} f| \leq |\int_{x_1}^{x_2} |f||$.

NOTA. Una f puó essere integrabile senza essere assolutamente integrabile.
Sia, ad esempio, $f(t) = \frac{1}{t}\sin\frac{1}{t}, \;\; t \in (0,1]$. Posto $\frac{1}{t} = s$, troviamo

$$\forall x \in (0,1) : \int_x^1 \frac{1}{t} \sin\frac{1}{t}\, dt = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{\sin s}{s}\, ds \to_{x\to 0^+} \int_1^{+\infty} \frac{\sin s}{s}\, ds$$

Dunque l'integrale converge, ma $\int_0^1 |\frac{1}{t} \sin\frac{1}{t}|\, dt = \int_1^{+\infty} |\frac{\sin s}{s}|\, ds = +\infty$.

Esercizi. Discutere la convergenza dei seguenti integrali, ed eventualmente calcolarli.

$$1.\ \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad 2.\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{|1-x^2|}}\, dx \quad 3.\ \int_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\, dx,\quad p,q>0$$

$$4.\ \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p \log^q x},\quad p,q>0 \quad 5.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} \quad 6.\ \int_{-1}^{1} \frac{\log(1+\sqrt{|x|})}{e^{\sin x}-1}\, dx$$

$$7.\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\, dx \quad 8.\ \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \quad 9.\ \int_0^1 x^\alpha \log^n x\, dx,\quad n\in \mathbf{N}$$

1. La funzione $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ha due singolaritá di ordine $\frac{1}{2}$ e quindi integrabili, in $x=1, x=-1$. Si ha: $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\,|_{-1}^{1} = \pi$

2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{x\cos x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ Dunque l'integrale é convergente e, per disparitá, vale zero. Ma, facilmente, la convergenza non é assoluta!

3. La funzione $f(x) := x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}$ é continua in $[0,1]$ se $p,q\geq 1$.
Se $p<1$, f ha una singolaritá in $x=0$, che é integrabile sse $p>0$.
Se $q<1$, f ha una singolaritá in $x=1$, che é integrabile sse $q>0$.
Dunque l'integrale converge sse $p,q>0$.

4. La funzione $\frac{1}{x^p \log^q x}$ ha in $x=1$ una singolaritá di ordine q (infatti $\log x = x-1+\circ(|x-1|)$ per x vicino ad 1) e quindi l'integrale diverge se $q\geq 1$.
Sia quindi $q<1$: in tal caso la singolaritá in $x=1$ é integrabile.
Se $p>1$, é $\frac{1}{x^p\log^q x} < \frac{1}{x^p}$ per $x>e$, e quindi l' integrale converge.
Infine, $p\leq 1 \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p\log^q x} \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\log^q x} = (\frac{\log^{1-q} x}{1-q})\,|_1^{+\infty} = +\infty$.
Dunque l'integrale converge sse $q<1$ e $p>1$.

5. Siccome $\cos x$ va a zero come $1-x$ per x che tende a $\frac{\pi}{2}$, la funzione $\frac{1}{\cos x}$ ha in $x=\frac{\pi}{2}$ una singolaritá non integrabile: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos x} = +\infty$.

6. Siccome $\log(1+\sqrt{|x|}) \;=\; \sqrt{|x|} \;+\; \circ(\sqrt{|x|}),\;\; e^{\sin x}-1 \;=\; x+\circ(x)$ per x vicino a 0, la funzione $|\frac{\log(1+\sqrt{|x|})}{e^{\sin x}-1}|$ é in $x=0$ un infinito di ordine $\frac{1}{2}$ ed é quindi assolutamente integrabile: $\int_0^1 |\frac{\log(1+\sqrt{|x|})}{e^{\sin x}-1}|\,dx \;<\; +\infty$.

7. Intanto $\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\log(\sin x)|\,dx \;\le\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} (|\log(\frac{\sin x}{x})| \;+\; |\log x|)\,dx \;<\; +\infty$.
Calcolo dell'integrale: posto $x=2t$, si ha

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx \;=\; 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin 2t)\,dt \;=\; \frac{\pi}{2}\log 2 \;+\; 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin t) \;+\; \log(\cos t)\,dt$$

Ora, siccome $\cos t \;=\; \sin(\frac{\pi}{2} \;-\; t)$, posto $s=\frac{\pi}{2} \;-\; t$ otteniamo

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\cos t)\,dt \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin(\frac{\pi}{2}-t))\,dt \;=\; -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \log(\sin s)\,ds \;=\; \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin s)\,ds$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx \;=\; \frac{\pi}{2}\,\log 2 \;+\; 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx$$

e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x)\,dx \;=\; -\frac{\pi}{2}\,\log 2$$

8. La funzione $\frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}$ ha singolaritá integrabili in $x=1, x=-1$ ed é quindi integrabile in $[0,1]$. Poi, posto $x \;=\; \sin t$, si ha

$$\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\,dt$$

9. $\int_0^1 x^\alpha \log^n x\,dx$ converge sse $\alpha \;>\; -1$.
Calcoliamo $I_n \;:=\; \int_0^1 x^\alpha \log^n x\,dx,\;\; \alpha > -1$.
Intanto, integrando per parti,

$$I_1 \;=\; -\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\alpha+1}\,dx \;=\; -\frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

Poi, di nuovo integrando per parti,

$$I_n \;=\; \int_0^1 x^{\alpha+1}\,\frac{\log^n x}{x}\,dx \;=\; -(\alpha+1)\,\int_0^1 x^\alpha\,\frac{\log^{n+1} x}{n+1}\,dx$$

e quindi

$$I_{n+1} \;=\; -\frac{n+1}{\alpha+1}\,I_n \;=\; (-1)^2\frac{(n+1)n}{(\alpha+1)^2}\,I_{n-1} \;=\; \ldots \;=\; (-1)^n\,\frac{(n+1)!}{(\alpha+1)^n}\,I_1 \;=\;$$

$$=\; \frac{(-1)^{n+1}\,(n+1)!}{(\alpha+1)^{n+2}}$$