

## AM210: Tracce delle lezioni- XI Settimana

### IL PROBLEMA DI CAUCHY

Sia  $f \in C(O, \mathbf{R}^n)$ ,  $x \in O \subset \mathbf{R}^n$  aperto. Trovare, se esistono,  $\delta > 0$ , e una funzione  $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$  tali che

$$\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \quad \gamma(0) = x \quad (*)$$

NOMENCLATURA. L'equazione  $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$  é infatti un **sistema di  $n$  equazioni differenziali** nelle  $n$  (funzioni) incognite  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ :

$$\dot{\gamma}_i(t) = f_i(\gamma(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta), \quad \gamma_i(0) = x_i \quad i = 1, \dots, n \quad (*)$$

La condizione  $\gamma(0) = x$  si chiama **condizione iniziale**.

La funzione data  $f$  si chiama anche **campo di vettori** in  $O$  (i vettori  $f(x)$  applicati nei punti  $x \in O$ ). Una soluzione  $\gamma$  é una *curva tangente in ogni suo punto al campo di vettori  $f$*  e si chiama anche **curva integrale** del campo. Al variare della condizione iniziale  $x$  in  $O$  si otterrà una famiglia di curve  $\gamma^x(t)$  che si chiamerá **flusso** generato dal campo  $f$ .

Dal punto di vista dinamico,  $f$  é un **campo di velocità** e  $\gamma(t)$  é, al variare di  $t$ , la **traiettoria** di un punto mobile la cui velocità all'istante  $t$  é data da  $f(\gamma(t))$  e che si trova nell'istante iniziale  $t = 0$  nella posizione iniziale  $x$ .

### Una formulazione equivalente del Problema di Cauchy: esistenza di un punto fisso per un operatore integrale

Se  $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$  é soluzione del Problema di Cauchy (\*), allora, per il TFC,  $\gamma_i(t) = x_i + \int_0^t f_i(\gamma(\tau))d\tau$ , ovvero, con notazione vettoriale,

$$\gamma(t) = x + \int_0^t f(\gamma(\tau))d\tau \quad t \in (-\delta, \delta) \quad (**)$$

ove, se  $x \in C([a, b], \mathbf{R}^n)$ , intendiamo che  $\int_a^b x(t)dt := (\int_a^b x_1(t)dt, \dots, \int_a^b x_n(t)dt)$ .

Viceversa, se  $\gamma \in C((-\delta, \delta), O)$  risolve l'equazione integrale (\*\*), allora, di nuovo per il TFC,  $\gamma \in C^1((-\delta, \delta), O)$  e soddisfa (\*).

Vediamo ora come (\*\*) si riscriva come *equazione di punto fisso per un opportuno operatore integrale*. Sia  $\bar{B}_{2r}(x_0) \subset O$ , cosicché, se  $x \in B_r(x_0)$ , allora

$$\|\gamma(t) - x\| \leq r \quad \forall t \in [-\delta, \delta] \quad \Rightarrow \quad \|\gamma(t) - x_0\| \leq 2r \quad \forall t \in [-\delta, \delta]$$

Posto

$$M := \sup_{\xi \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(\xi)\|$$

e supposto di aver scelto  $\delta$  di modo che  $\delta M < r$ , si ha

$$\gamma([- \delta, \delta]) \subset \overline{B}_{2r}(x_0) \Rightarrow x + \int_0^t f(\gamma(\tau)) d\tau \in \overline{B}_{2r}(x_0) \quad \forall t \in [- \delta, \delta]$$

Ciò segue dalla disuguaglianza  $\left\| \int_a^b x(t) dt \right\|^2 = \int_a^b \left[ \sum_{i=1}^n \left( \int_a^b x_i(t) dt \right) x_i(t) \right] dt \leq$

$$\int_a^b \left[ \|x(t)\| \left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \right] dt = \left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \int_a^b \|x(t)\| dt \quad \text{ovvero}$$

$$\left\| \int_a^b x(t) dt \right\| \leq \int_a^b \|x(t)\| dt$$

Con tale scelta di  $\delta$ , e per ogni fissato  $x \in B_r(x)$  la formula

$$(T^x \gamma)(t) := x + \int_0^t f(\gamma(\tau)) d\tau \quad t \in [- \delta, \delta]$$

definisce un *operatore integrale*  $T^x$  che trasforma  $\gamma \in C([- \delta, \delta], \overline{B}_r(x))$  in  $T^x \gamma \in C([- \delta, \delta], \overline{B}_r(x))$  cioè  $T^x$  manda lo spazio metrico completo  $C([- \delta, \delta], \overline{B}_r(x))$  in se:  $\gamma$  **soddisfa (\*\*)** se e solo se  $\gamma$  **è un punto fisso di**  $T^x$ .

**PROBLEMA DI CAUCHY:** **esistenza ed unicità locale**

**TEOREMA (di Picard)**

Sia  $f \in Lip_{loc}(O)$ ,  $O$  aperto in  $\mathbf{R}^n$ . Sia  $\overline{B}_{2r}(x_0) \subset O$ . Siano

$$M := \sup_{x \in \overline{B}_{2r}(x_0)} \|f(x)\|, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k \|x - y\| \quad \forall x, y \in \overline{B}_{2r}(x_0)$$

Sia  $\delta > 0$  tale che  $\delta k < 1$ ,  $\delta M < r$ . Allora: per ogni  $x \in B_r(x_0)$ ,

$\exists! \gamma^x \in C^1((-\delta, \delta), B_{2r}(x_0))$  tale che  $\gamma^x(0) = x$ ,  $\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (-\delta, \delta)$

Inoltre,  $\gamma^x$  dipende in modo continuo da  $x$ :

$$\|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty = \sup_{t \in [-\delta, \delta]} \|\gamma^x(t) - \gamma^y(t)\| \leq \frac{1}{1 - \delta k} \|x - y\| \quad \forall x, y \in B_r(x_0)$$

**Prova.** Ricordiamo che lo spazio vettoriale  $C([-δ, δ], \mathbf{R}^n)$ , munito della norma  $\|\gamma\|_\infty = \sup_{t \in [-δ, δ]} \|\gamma(t)\|$ , é un Banach, e quindi

$$X := \{\gamma \in C([-δ, δ], \mathbf{R}^n) : \|\gamma(t) - x\| \leq r \quad \forall t \in [-δ, δ]\}$$

é spazio metrico completo (rispetto alla metrica indotta). Ora, fissato  $x \in B_r(x_0)$ ,

$$\gamma \in X \Rightarrow \|\gamma(t) - x\| \leq r \quad \forall t \in [-δ, δ] \Rightarrow \|\gamma(t) - x_0\| \leq 2r \quad \forall t \in [-δ, δ]$$

Dunque,  $\forall \gamma \in X$ , é definita la funzione  $f(\gamma(t))$ ,  $t \in [-δ, δ]$  e quindi lo é la funzione

$$T^x \gamma : t \rightarrow x + \int_0^t f(\gamma(\tau)) d\tau, \quad t \in [-δ, δ]$$

Chiaramente  $T^x \gamma \in C([-δ, δ], \mathbf{R}^n) \quad \forall \gamma \in X$ . Inoltre,  $\gamma \in X \Rightarrow$

$$\|(T^x \gamma)(t) - x\| = \left\| \int_0^t f(\gamma(\tau)) d\tau \right\| \leq \int_0^t \|f(\gamma(\tau))\| d\tau \leq \delta M < r \Rightarrow T\gamma \in X$$

$$\begin{aligned} \text{Infine, } \gamma, \beta \in X &\Rightarrow \|T^x \gamma - T^x \beta\|_\infty \leq \sup_{t \in [-δ, δ]} \left\| \int_0^t [f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))] d\tau \right\| \leq \\ &\leq \sup_{t \in [-δ, δ]} \left| \int_0^t \|f(\gamma(\tau)) - f(\beta(\tau))\| d\tau \right| \leq \sup_{t \in [-δ, δ]} \left| \int_0^t k \|\gamma(\tau) - \beta(\tau)\| d\tau \right| \leq k\delta \|\gamma - \beta\|_\infty \end{aligned}$$

perché  $f$  é Lipschitziana di costante  $k$  in  $\overline{B}_{2r}(x_0)$ . Siccome  $\delta k < 1$ ,  $T^x$  é una contrazione di  $X$  in sé e quindi, per il Teorema delle contrazioni

$$\exists ! \gamma^x \in X : \quad T^x \gamma^x = \gamma^x. \quad \text{Notiamo che } (T\gamma^x)(0) = x.$$

Dunque,  $\gamma^x$  é l'unica soluzione, definita in  $[-δ, δ]$ , del problema di Cauchy

$$\dot{\gamma}^x(t) = f(\gamma^x(t)) \quad \forall t \in (-δ, δ), \quad \gamma^x(0) = x$$

$$\text{Infine, } \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \leq \|x - y\| + \sup_{t \in [-δ, δ]} \left| \int_0^t \|f(\gamma^x(\tau)) - f(\gamma^y(\tau))\| d\tau \right| \leq$$

$$\|x - y\| + \delta k \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \Rightarrow \|\gamma^x - \gamma^y\|_\infty \leq \frac{1}{1 - \delta k} \|x - y\| \quad \forall x, y \in B_r(x_0)$$

**PROBLEMA DI CAUCHY: Unicit  globale, soluzione massimale.**

**Proposizione 1.** Sia  $f \in C^1(O, \mathbf{R}^n)$ ,  $O$  aperto in  $\mathbf{R}^n$ . Siano  $\gamma \in C^1((a, b))$  e  $\beta \in C^1((\tilde{a}, \tilde{b}))$  soluzioni dello stesso problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

Se  $(a, b) \subset (\tilde{a}, \tilde{b})$ , allora  $\gamma \equiv \beta$  in  $(a, b)$ :  $\beta$    un prolungamento della soluzione  $\gamma$ .

*Prova.* Per il Teorema di Picard, esiste  $\delta > 0$  tale che  $\gamma \equiv \beta$  in  $|t| \leq \delta$ . Quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \gamma(\tau) = \beta(\tau), \forall \tau \in [0, t]\}$$

  ben definito e maggiore o uguale a  $\delta$ . Si tratta di mostrare che  $\bar{t} = b$ . Sia per assurdo  $\bar{t} < b$ . Per continuit ,   allora anche  $\gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$  e inoltre  $\gamma(t), \beta(t)$  sono soluzioni dell'equazione differenziale in  $(0, \bar{t}]$ . Dunque  $\gamma, \beta$  sono entrambe soluzioni del medesimo problema di Cauchy

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad x(\bar{t}) = \gamma(\bar{t}) = \beta(\bar{t})$$

e quindi coincidono anche in  $[\bar{t}, \bar{t} + \sigma]$  per un  $\sigma > 0$  piccolo, e quindi

$$\bar{t} := \sup\{t : \gamma(\tau) = \beta(\tau), \forall \tau \in [0, t]\} \geq \bar{t} + \sigma$$

contraddizione. Dunque  $\gamma \equiv \beta$  in  $[0, b)$  e, analogamente,  $\gamma \equiv \beta$  in  $(a, 0]$ .

Una soluzione non prolungabile si chiama **soluzione massimale**. La soluzione massimale   evidentemente unica ed il suo intervallo di definizione si chiama **intervallo massimale di esistenza** e si indica  $(t^-(x_0), t^+(x_0))$ , o semplicemente, se non vi   ambiguit ,  $(t^-, t^+)$ .

Se  $t^-(x_0) = -\infty$ ,  $t^+(x_0) = +\infty$ , diremo che il Problema di Cauchy con condizione iniziale  $x(0) = x_0$  ammette **soluzione globale** o per tutti i tempi.

**ESEMPLI.**

Il problema di Cauchy  $\dot{x} = x$ ,  $x(0) = x_0$  ha come soluzione massimale  $x(t) = x_0 e^t$ ,  $t \in \mathbf{R}$   
mentre il problema  $\dot{x} = x^2$ ,  $x(0) = x_0 > 0$  ha come soluzione massimale  $x(t) = \frac{x_0}{1 - tx_0}$ ,  $t \in (-\infty, \frac{1}{x_0})$ .

**Proposizione 2.** Sia  $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ ,  $\dot{\gamma}(t) = f(\gamma(t))$ ,  $t \in [0, T)$ . Allora

$$M := \sup_{t \in [0, T)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty \Rightarrow \gamma \text{ é prolungabile oltre } T$$

Dunque,  $\sup_{t \in (t^-, t^+)} \|f(\gamma(t))\| < +\infty$  (ad es. se  $\gamma$  é limitata)  $\Rightarrow t^- = -\infty, t^+ = +\infty$ .

**Prova.** É  $\|\gamma(t) - \gamma(s)\| = \left\| \int_s^t f(\gamma(\tau)) d\tau \right\| \leq M|t - s| \quad \forall s, t \in [0, T)$  e quindi  $\gamma$  é uniformemente continua in  $[0, T)$ . Ne deriva che

$$\exists \gamma(T) := \lim_{t \rightarrow T^-} \gamma(t) \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(T) = f(\gamma(T))$$

Detta allora  $\hat{\gamma}$  la soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale  $\hat{\gamma}(T) = \gamma(T)$ , la funzione uguale a  $\gamma$  in  $[0, T)$  ed uguale a  $\hat{\gamma}$  in  $[T, T + \delta]$  é di classe  $C^1$  ed é soluzione del sistema differenziale in  $[0, T + \delta]$ .

**Corollario 1.** Sia  $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$  tale che

$$(i) \quad \{x : g(x) \leq g(x_0)\} \text{ é limitato} \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n \quad (ii) \quad \langle \nabla g(x), f(x) \rangle \leq 0 \quad \forall x$$

Allora le soluzioni del sistema  $\dot{x} = f(x)$  sono definite per tutti i tempi positivi.

Infatti,  $\frac{d}{dt}g(x(t)) = \langle \nabla g(x(t)), \dot{x} \rangle = \langle \nabla g(x(t)), f(x(t)) \rangle \leq 0 \quad \forall t$  e quindi la traiettoria  $x(t)$  si mantiene, per tutti i tempi positivi, nella regione limitata  $\{g(x) \leq g(x_0)\}$  e quindi  $t^+ = +\infty$ .

**Corollario 2.** Data  $g \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ , siano  $g^M := \{x : g(x) \leq M\}$  e  $\Sigma^M := \{x : g(x) = M\}$ . Se

$$(i) \quad g^M := \{x : g(x) \leq M\} \text{ é limitato} \quad (ii) \quad \langle \nabla g(x), f(x) \rangle < 0 \quad \forall x \in \Sigma^M$$

allora la soluzione del problema di Cauchy  $\dot{x} = f(x) \quad x(0) = x_0$  con  $g(x_0) \leq M$  é definita per tutti i tempi positivi.

Infatti  $g(x(t)) \leq M \quad \forall t \in [0, t^+(x_0))$ , giacché, se no, é ben definito

$$T := \inf\{t > 0 : g(x(t)) \geq M\} \quad \text{e quindi} \quad g(x(t)) \leq M \quad \forall t \leq T \quad \text{e} \quad g(x(T)) = M$$

Ma questo é assurdo perché, se  $t < T$ ,  $T - t$  piccolo, allora

$$(g \circ x)'(T) = \langle \nabla g(x(T)), x'(T) \rangle = \langle \nabla g(x(T)), f(x(T)) \rangle < 0 \Rightarrow \\ g(x(t)) = g(x(T)) + (t - T) [\langle \nabla g(x(T)), f(x(T)) \rangle + o(1)] > g(x(T)) = M$$

## ESEMPI E COMPLEMENTI

*Esempio 1.* Le soluzioni del sistema  $\dot{x} = -x^3y^2$ ,  $\dot{y} = -2y^3x^2$  sono definite per tutti i tempi positivi: basta prendere  $g(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$  per ottenere

$$\frac{d}{dt}g(x(t), y(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) = x\dot{x} + y\dot{y} = -x^4y^2 - 2y^4x^2 \leq 0 \quad \forall t$$

Invece,  $t^- > -\infty$  quale che sia la condizione iniziale. Questo si può vedere così:

$$\frac{d}{dt}[x(t)^2y(t)^2] = 2xy^2\dot{x} + 2yx^2\dot{y} = -2xy^2(x^3y^2) - 2yx^2(2y^3x^2) = -6(x^2y^2)^2$$

cioè  $z(t) := x(t)^2y(t)^2$  risolve  $\dot{z} = -6z^2$  e quindi  $z(t) = \frac{z(0)}{1+6z(0)t}$   $t \in (-\frac{1}{6z(0)}, +\infty)$ . Siccome  $z(0) = x(0)^2y(0)^2$  e

$$\dot{x} = -x(x^2y^2) = -x\frac{z(0)}{1+6z(0)t} \quad \dot{y} = -2y(x^2y^2) = -2y\frac{z(0)}{1+6z(0)t}$$

troviamo  $\log \frac{x(t)}{x(0)} = -\int_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s} ds$ ,  $\log \frac{y(t)}{y(0)} = -2\int_0^t \frac{z(0)}{1+6z(0)s} ds$ , ovvero

$$x(t) = \frac{x(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{6}}}, \quad y(t) = \frac{y(0)}{(1+6z(0)t)^{\frac{1}{3}}}, \quad t \in \left(-\frac{1}{6z(0)}, +\infty\right)$$

Nota anche che  $\frac{\dot{y}}{y} = -2x^2y^2 = 2\frac{\dot{x}}{x} \Rightarrow \log \frac{y(t)}{y(0)} = 2\log \frac{x(t)}{x(0)} \Rightarrow y(t) = \frac{y(0)}{x(0)^2}x(t)^2$ .

**Sistemi gradiente:**  $\dot{x} = -\nabla F(x)$   $F \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ .

Per applicare i Corollari, basta prendere  $g = F$ :  $\langle \nabla g(x), f(x) \rangle = -\|\nabla F\|^2$  e dedurre che se  $\{x \in \mathbf{R}^n : F(x) \leq F(x_0)\}$  è limitato per ogni  $x_0 \in \mathbf{R}^n$ , allora le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi. In effetti si può dire di più:

*se  $F$  è inferiormente limitata le soluzioni sono definite per tutti i tempi positivi.*

Infatti,  $\int_0^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau = -\int_0^t (F(x(\tau)))' d\tau = F(x(0)) - F(x(t)) \leq F(x(0)) - \inf F \Rightarrow \|x(t) - x(s)\| = \left\| \int_s^t \dot{x}(\tau) d\tau \right\| \leq \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\| d\tau \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} \left( \int_s^t \|\nabla F(x(\tau))\|^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}} \leq |t-s|^{\frac{1}{2}} (F(x(0)) - \inf F)^{\frac{1}{2}} \quad \forall s < t$  e quindi  $x(t)$  è uniformemente continua. Si conclude come nella dimostrazione della Proposizione 2.

*Esempio 2.* Le soluzioni di  $\dot{x} = xy^2(x^2+y^2)$ ,  $\dot{y} = -yx^4(x^2+y^2)$  sono definite  $\forall t$ :  $\frac{d}{dt}\left(\frac{x^4}{2} + y^2\right) = 2x^3\dot{x} + 2y\dot{y} = 2x^4y^2(x^2+y^2) - 2y^2x^4(x^2+y^2) \equiv 0$  e quindi  $g$  è costante lungo le traiettorie, ovvero le traiettorie sono contenute negli insiemi di livello di  $g$ , che sono visibilmente limitati.