AM2 2010-11: Tracce delle lezioni- III Settimana

DEFINIZIONE (di limite) Sia $f: A \to \mathbf{R}$, $A \subset \mathbf{R}^n$. Sia $\dot{B}_r(u) = B_r(u) \setminus \{u\}$. Sia u_0 tale che $\dot{B}_r(u_0) \cap A$ é non vuoto $\forall r > 0$. Allora

$$\lim_{u \to u_0} f = l \iff (\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ |f(u) - l| \le \epsilon)$$

$$\lim_{u \to u_0} f = +\infty \iff (\forall M > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ u \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ f(u) \ge M)$$

Se $B'_r \cap A$ é non vuoto per ogni $r > 0$, allora

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = l \iff (\forall \epsilon > 0, \ \exists \mathbf{R}_\epsilon > 0 : \ u \in A, \ ||u|| \ge R_\epsilon \Rightarrow |f(u) - l| \le \epsilon)$$

$$\lim_{||u|| \to +\infty} f = +\infty \iff (\forall M > 0, \ \exists R_M > 0 : \ u \in A, \ ||u|| \ge R_M \Rightarrow f(u) \ge M)$$

NOTA. Come per le funzioni di una variabile si vede facilmente che
(i) f ha limite l per u tendente a u_0 ($|u|$ tendente a $+\infty$) $\iff$
$(u_n \in A, \ u_n \ne u_0, \ u_n \to u_0 \ \ (|u_n| \to +\infty\ ) \ \Rightarrow \ f(u_n) \to \ l)$
(ii) (**Cauchy**) f ha *limite finito* l per u tendente a u_0 $\iff$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ \ u, v \in A \cap \dot{B}_{\delta_\epsilon}(u_0) \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \le \epsilon)$$

f ha limite l per $|u|$ tendente a $+\infty$ $\iff$

$$(\forall \epsilon > 0, \ \exists R_\epsilon > 0 : \ \ u, v \in A, \ |u|, |v| \ge R_\epsilon \ \Rightarrow \ |f(u) - f(v)| \le \epsilon)$$

ESEMPI . **(i)** Sia $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \ne 0$.

Dalla NOTA-(i) si vede subito che $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \ne 0$. Invece,

$\lim_{u \to 0} f(u)$ e $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esistono: $f(tx, ty) \equiv \frac{xy}{x^2+y^2}$

(ii) Sia $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ se $x^2 + y^2 \ne 0$. Come sopra, $\lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) \ \forall u_0 \ne 0$. Ed é anche $\lim_{u \to 0} f(u) = 0$: $|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}| \le \frac{|x|}{2} \le \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{2}$;

Poi, $\lim_{|u| \to +\infty} f(u)$ non esiste: $f(x,x) = \frac{x}{2} \to_{x \to \pm\infty} \pm\infty$.

(iii) Sia $f(x,y) = \arctan \frac{x}{y^2}$ se $y \ne 0$. Se $x_n \to x \ne 0$ e $y_n \to 0$ allora $\frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\infty$ e quindi $\arctan \frac{x_n}{y_n^2} \to (sign x)\frac{\pi}{2}$. Poi, siccome $f(x, \sqrt{|x|}) = (sign x)\frac{\pi}{4}$, la f non ha limite al tendere di (x,y) a $(0,0)$.

SPAZI METRICI: ELEMENTI DI TOPOLOGIA

Sia (X, d) spazio metrico.
1. $O \subset X$ si dice **aperto** se $\forall u \in O\ \exists r > 0 :\ B_r(u) \subset O$.
Dunque un insieme é aperto se tutti i suoi punti sono punti interni; equivalentemente, se non contiene nessuno dei suoi punti frontiera.

Indicheremo con $\mathcal{O}$ la famiglia degli aperti di (X, d). Esempi.

La palla 'aperta' $B_r(x_0)$ é un aperto, perché, se $x \in B_r(x_0)$, $\delta := d(x, x_0)$, allora

$$d(y, x) < r - \delta \ \Rightarrow d(y, x_0) \leq d(y, x) + d(x, x_0) < r - \delta + \delta = r$$

Se $f \in C(X, \mathbf{R})$ allora $\{x : \ f(x) < c\}$ é aperto per ogni $c \in \mathbf{R}$. Infatti, se $f(x) < c$ e $f(x) + \epsilon < c$, e se δ é tale che $d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon$, allora $f(y) = f(y) - f(x) + f(x) < \epsilon + c - \epsilon = c$.

Piú semplicemente, $\{x :\ f(x) < c\}$ é aperto perché preimmagine di un aperto.

2. $F \subset X$ si dice **chiuso** se F' (il complementare di F) é aperto.
Ovvero, se contiene tutti i suoi punti frontiera.
Ad esempio, $f \in C(X, \mathbf{R}) \quad \Rightarrow \quad \{x :\ f(x) \leq c\}$ é chiuso per ogni $c \in \mathbf{R}$. In particolare, una palla chiusa é un insieme chiuso.

3. (i) $O_\alpha \in \mathcal{O} \quad \alpha \in \mathcal{A},\ \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\quad \Rightarrow \quad \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha \in \mathcal{O}$

(ii) F_α chiusi, $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ finito $\quad \Rightarrow \quad \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha$ e $\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F_\alpha$ sono chiusi

Prova. (i) $x \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha \Rightarrow \ \exists\, \overline{\alpha}, \exists B_r(x) : \quad B_r(x) \subset O_{\overline{\alpha}} \subset \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} O_\alpha$. Se $x \in \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha$ esistono $B_{r_\alpha}(x) \subset O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}_0$. Se $r \leq r_\alpha\, \forall \alpha \in \mathcal{A}_0$ allora $B_r(x) \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} B_\alpha \subset \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} O_\alpha$

(ii) $\left(\bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}} F_\alpha\right)' = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}} F'_\alpha \in \mathcal{O}$ e $\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F_\alpha\right)' = \bigcap_{\alpha\in\mathcal{A}_0} F'_\alpha \in \mathcal{O}$

In particolare, se $\mathcal{F}_A$ indica la classe dei chiusi contenenti A, posto $\overline{A} : \bigcap_{F\in\mathcal{F}_A} F$, allora $\overline{A}$ é chiuso, ed é quindi il piú piccolo chiuso contenente A ($\overline{A}$ é la **chiusura** di A).

4. $F \subset X$ é **chiuso** $\quad \Leftrightarrow \quad (u_k \in F,\ u_k \to_k u \quad \Rightarrow \quad u \in F) \quad \Leftrightarrow \quad F = \overline{F}$.
Prova della prima equivalenza. $\Rightarrow$: Sia F chiuso, e siano $u_k \in F,\ u_k \to_k u$. Se $u \notin F$, allora $\exists r > 0 :\ B_r(u) \subset F'$ mentre $u_k \in F \cap B_r(u)$ definitivamente.
$\Leftarrow$: Per assurdo: F' non é aperto $\Rightarrow \exists u \in F'$ tale che $D_r(u) \cap F \neq \emptyset$ $\forall r > 0 \quad \Rightarrow$: $\forall k,\ \exists\ u_k \in D_{\frac{1}{k}}(u) \cap F \quad \Rightarrow \quad u_k \in F$ e $u_k \to_k u \ \Rightarrow \ u \in F$.
Prova della seconda equivalenza. Se $F = \overline{F}$, allora F é chiuso perché $\overline{F}$ é chiuso.

Viceversa, in primo luogo, $F \subset \overline{F}$; poi, $\overline{F} \subset F$ perché $\overline{F}$ é contenuto in ogni chiuso contenente F, ed F é chiuso.

5. $x \in \overline{A} \ \Leftrightarrow\ \exists\, x_j \in A : \quad x_j \to_j x$.

Prova. Sia $x \in \overline{A}$ e supponiamo, per assurdo, che non ci sia $x_j \in A$ tale che $x_j \to x$. Allora esiste $r > 0$ tale che $B_r(x) \cap A = \emptyset$. Ma allora $(B_r(x))'$, essendo un chiuso contenente A, contiene $\overline{A}$, che contiene x: assurdo. Viceversa, se $x_j \in A : \quad x_j \to_j x$ e F é un chiuso contenente A, allora $x \in F$ e quindi, per l'arbitrarietá di F, $x \in \overline{A}$.

6. (i) Ogni aperto in $\mathbf{R}^n$ é unione numerabile di palle aperte (o chiuse)

Infatti, se $\quad \mathcal{B}_O := \{B_r(x) \subset O : \quad r \in \mathbf{Q}, x \in \mathbf{Q}^n\}, \quad \mathcal{B}_O$ é numerabile. É $O = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_O} B$. Infatti, se $B_{3r}(\hat{x}) \subset O$, allora $\hat{x} \in B_q(x) \in \mathcal{B}_O$ ove $q \in (r, 2r)$ e $\|x - \hat{x}\| < r$.

7. Se O_α sono sottinsiemi aperti in $\mathbf{R}^n$, esistono $\alpha_j, j \in \mathbf{N}$ tali che $\bigcup_\alpha O_\alpha = \bigcup_j O_{\alpha_j}$

Sia $\quad \mathcal{B} := \{B_r(x) : \quad r \in \mathbf{Q},\ x \in \mathbf{Q}^n,\ B_r(x) \subset O_\alpha$ per qualche $\alpha\}$. $\quad \mathcal{B}$ é famiglia numerabile di palle aperte, che si puó quindi indicare come $\{B_j : \ j \in \mathbf{N}\}$. Come sopra, $O_\alpha = \bigcup_{B_j \subset O_\alpha} B_j$. Sia, per ogni j, α_j tale che $B_j \subset O_{\alpha_j}$. Allora

$$\cup_\alpha O_\alpha \subset \cup_j B_j \subset \cup_j O_{\alpha_j} \subset \cup_\alpha O_\alpha$$

8. $A \subset \mathbf{R}^n$ si dice **limitato** se esiste $r > 0 : \quad A \subset B_r$

9. (i) $K \subset X$ si dice **compatto** se ogni ricoprimento aperto di K ammette un sottoricoprimento finito: cioé, se $O_\alpha \in \mathcal{O}, \alpha \in \mathcal{A}$,

$$K \subset \bigcup_\alpha O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\ \alpha_1, \ldots, \alpha_l \quad \textit{tali che} \quad K \subset \bigcup_{j=1,\ldots,l} O_{\alpha_j}$$

(ii) $K \subset X$ si dice **sequenzialmente compatto** se ogni successione $x_n \in K$ ammette una sottosuccessione convergente a un elemento di K, ovvero

$$x_k \in K \quad \Rightarrow \quad \exists x_{k_j}, x \in K \quad \text{tali che} \quad x_{k_j} \to_j x$$

PROPOSIZIONE 1 Sia $K \subset \mathbf{R}^n$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

(i) K é chiuso e limitato
(ii) K é sequenzialmente compatto
(iii) K é compatto

Prova.(i) $\Rightarrow$ (ii): $\quad u_k = (x_{k,1}, \ldots, x_{k,n}) \in K \ \Rightarrow\ \sup_k |x_{k,j}| < +\infty \quad$ per tutti i $j = 1, \ldots, n \ \Rightarrow\ \exists k_i,\ \exists\ x_1, \ldots, x_n : \ x_{k_i,j} \to_i x_j$ per $j = 1, \ldots, n \ \Rightarrow \quad u_{k_i} \to_i u$ $u = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ perché K é chiuso.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Dal punto 3-(iii) sappiamo che possiamo supporre $\mathcal{A} = \mathbf{N}$. Supponiamo, per assurdo, che per ogni $k \in \mathbf{N}$ esista $x_k \notin \bigcup_{i=1}^{k} O_i$. Sia $x_{k_j} \to_j x \in K$. Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} O_i$, esiste k_0 tale che $x \in O_{k_0}$ e quindi $x_{k_j} \in O_{k_0}$ per j grande, mentre $x_{k_j} \notin O_i$ se $i \leq k_j$.
(iii) $\Rightarrow$ (i): Siccome $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$, ove D_i é la palla di raggio $i \in \mathbf{N}$ e centro l'origine, $K \subset D_{\hat{i}}$ per qualche $\hat{i}$. Per provare che K é chiuso, supponiamo che non lo sia: esiste $x_k \in K$, $\hat{x} \notin K$ con $x_k \to_k \hat{x}$. Siccome $K \subset \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ si ha che $K \subset \bigcup_k \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} = \mathbf{R}^n \setminus \{\hat{x}\}$ e quindi $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{k}\} =$
$= \{x : \|x - \hat{x}\| > \frac{1}{N}\}$. Ma $x_k \in K$ e $\|x_k - \hat{x}\| < \frac{1}{N}$ se k é grande.

Nel seguito, $(X, d), (Y, \rho)$ sono spazi metrici e $f : X \to Y$.

TEOREMA $f \in C(K, Y)$, $K \subset X$ compatto $\Rightarrow$ $f(K)$ é compatto.

In particolare , se $Y = \mathbf{R}$, esistono $\underline{u}$, $\overline{u} \in K$: $\inf_K f = f(\underline{u})$, $f(\overline{u}) = \sup_K f$.

Prova. $O_\alpha, \alpha \in \mathcal{A}$ aperti in $\mathbf{R}^m$, $f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \quad \Rightarrow K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} f^{-1}(O_\alpha) \quad \Rightarrow$ $\exists \mathcal{A}_0$ finito tale che $K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_0} f^{-1}(O_\alpha) \quad \Rightarrow f(K) \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}_0} O_\alpha \Rightarrow f(K)$ é compatto.

Variante di Weierstrass Sia $F \subset \mathbf{R}^n$ chiuso. Sia $f \in C(F)$ tale che

(i) **(coercivitá)** $u_n \in C, \|u_n\| \to_n +\infty \Rightarrow f(u_n) \to_n +\infty$

(ii) **(semicontinuitá inferiore)** $u_n \in C, u_n \to u \Rightarrow \liminf_n f(u_n) \geq f(u)$.

Allora $\quad \exists\, \underline{u} \in C$ tale che $\quad f(\underline{u}) = \inf_C f$

Sia infatti $u_n \in C$ *successione minimizzante*, ovvero

$$f(u_n) \to_n \inf_C f$$

Allora u_n é limitata in virtú della coercivitá, e quindi si puó supporre, passando eventualmente ad una sottosuccessione, che u_n converga a qualche $u \in C$ (perché C é chiuso). Da (ii) segue quindi che

$$\inf_C f = \lim_n f(u_n) \geq f(u) \geq \inf_C f$$

COMPLEMENTI E ESERCIZI

NORME EQUIVALENTI. Diremo che due norme $\|.\|_i, i = 1, 2$ su di uno spazio vettoriale E sono tra di loro equivalenti se esistono $c \leq C$ costanti positive tali che

$$(*) \qquad c\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C\|x\|_1 \qquad \forall x \in E$$

Equivalentemente: $\quad \|x_n\|_1 \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \|x_n\|_2 \to 0$, ovvero l'identitá $Lx = x$ da $(E; \|.\|_1)$ a $(E; \|.\|_1)$ é continua insieme alla sua inversa.
Se invece nessuna delle due diseguaglianze in $(*)$ é verificata, le due norme si dicono non confrontabili.
Esercizio 1. Sia $E = l^1$. Si considerino su E le norme $\|x\|_\infty = \sup_j |x(j)|, \quad \|x\|_1 = \sum_j |x(j)|$. Provare che $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \quad \forall x \in l^1$, ma non esiste alcuna $c > 0$ tale che $\|x\|_1 \leq c\|x\|_\infty \quad \forall x \in l^1$.
Soluzione Intanto, $\sum_j |x(j)| \geq |x(j)| \quad \forall j \in \mathbf{N}$ e quindi $\sum_j |x(j)| \geq \|x\|_\infty$. Poi, se x_n é la successione cosi definita: $x_n(j) = \frac{1}{j} \quad$ se $j \leq n, \quad x_n(j) = 0$ se $j > n$, si ha $\|x_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $|\|x_n\|_1$ é la somma parziale ennesima della serie armonica, ed é quindi divergente.
Esercizio 2. Provare che in l^2 le norme $\|x\|_1$ e $\|x\|_2$ non sono equivalenti.
Esercizio 3. Provare che le due norme su $C_0^\infty(\mathbf{R})$ date da $\|f\|_\infty$ e $\|f'\|_\infty$ non sono confrontabili.
Soluzione Sia f tale che $\|f\|_\infty = 1$ e sia $f_n(x) = f(nx)$. Allora $\|f_n\|_\infty \equiv 1$ mentre $\|f_n'\|_\infty = n\|f'\|_\infty \to \infty$. Viceversa, se $f_n(x) = nf(\frac{x}{n})$, allora $\|f_n'\|_\infty \equiv \|f'\|_\infty$ mentre $\|f_n\|_\infty = n\|f\|_\infty \to \infty$.

Proposizione: Tutte le norme in $\mathbf{R}^n$ sono tra di loro equivalenti

Sia $\|\cdots\|$ una norma su $\mathbf{R}^n$. Indichiamo con $\|.\|_2$ la norma euclidea in $\mathbf{R}^n$. Proviamo che $\exists\, C \geq c > 0 : \quad c\|x\| \leq \|x\|_2 \leq C\|x\| \qquad \forall x \in E$.
Da $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ segue

$$\|x\| \leq \sum_{j=1}^n |x_j|\,\|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 = C\|x\|_2$$

In particolare, ció assicura che $x \to \|\cdots\|$ é funzione continua in $\mathbf{R}^n$ (munito della norma $\|\cdots\|_2$) e quindi é dotata di minimo sul compatto $\{\|x\|_2 = 1\}$, ovvero

$$\text{esiste } \underline{x}, \text{ con } \|\underline{x}\|_2 = 1 \text{ tale che:} \qquad \|x\| \geq \|\underline{x}\| \text{ se } \|x\|_2 = 1$$

e quindi $\|\frac{x}{\|x\|_2}\| \geq \|\underline{x}\| \quad \forall x \neq 0$ e quindi $\|x\| \geq \|\underline{x}\|\,\|x\|_2 = c\|x\|_2 \quad \forall x$.

1. Dati $\alpha,\ \beta\ >\ 0,$ sia

$$f(x,y)\ =\ \frac{|x|^\alpha\ |y|^\beta}{x^2+y^2}\quad \text{se}\quad x^2+y^2\ \neq\ 0,\quad f(0,0)\ =\ 0$$

Provare che f é continua in $(0,0)$ se e solo se $\alpha\ +\ \beta\ >\ 2.$

Se $\alpha+\beta-2\leq 0,$ $f(tx,ty)\ =\ t^{\alpha+\beta-2}f(x,y)$ non va a zero al tendere di t a zero (se $x^2+y^2\neq 0$) e quindi f non é continua in $(0,0)$.

Sia dunque $\alpha\ +\ \beta\ -\ 2\ >\ 0.$

Se $\alpha\geq 2$ é $f(x,y)\leq |x|^{\alpha-2}\,|y|^\beta\to_{x^2+y^2\to 0} 0.$ Analogamente se $\beta\geq 2.$

Resta da considerare il caso $\alpha,\ \beta\ <\ 2$. In tal caso, $\delta\ :=\ \frac{\alpha+\beta-2}{2}\in (0,\frac{1}{2}\min\{\alpha,\beta\})$ e possiamo scrivere

$$f(x,y)\ =\ \frac{|x|^{\alpha-\delta}\ |y|^{\beta-\delta}}{x^2+y^2}\,(|x|^\delta\ |y|^\delta\ )$$

ove $\delta>0,$ $\alpha-\delta\ >\ 0,$ $\beta-\delta\ >\ 0,$ $\alpha+\beta-2\delta\ =\ 2.$ Dalla diseguaglianza di Holder, segue che, se $0<r,s,$ $r+s=2$ allora (prendendo $p:=\frac{2}{r},$ $q:=\frac{2}{s}$ nella diseguaglianza di Holder)

$$|x|^r\ |y|^s\ \leq\ \frac{r}{2}\,x^2\ +\ \frac{s}{2}\,y^2\ \leq\ x^2\ +\ y^2\quad \forall x,y\in\mathbf{R}$$

e quindi $|x|^{\alpha-\delta}\,|y|^{\beta-\delta}\ \leq\ x^2\ +\ y^2$ e quindi $f(x,y)\ \leq\ |x|^\delta\ |y|^\delta\to_{x^2+y^2\to 0} 0.$

2. Sia $E\subset\mathbf{R}^n$. Provare che $\partial E=\partial E'$ e $\overline{E}=E\cup\partial E.$

3. Provare che, se O é aperto in $\mathbf{R}^n$ e $\gamma\in C([0,1],\mathbf{R}^n)$ tale che $\gamma(0)\in O$ e $\gamma(1)\notin O$, allora esiste $t\in(0,1)$ tale che $\gamma(t)\in\partial O.$

Infatti, $I:=\{t\in[0,1]:\gamma(s)\in O\quad \forall s<t\}$ contiene, per continuitá, $t=0.$ Posto $\bar t:=\sup I$, risulta $\gamma(\bar t)\in\partial O.$ Intanto, $\gamma(\bar t)\notin O$ perché, altrimenti $\gamma(t)\in O$ per $t\in[\bar t,\bar t+\delta]$ per un $\delta>0$. Poi, $\gamma(t_n)\in O$ e $t_n<\bar t$ e quindi, se $t_n\to_n\bar t$, $\gamma(\bar t)\in\overline{O}.$ Dunque $\gamma(\bar t)\in\overline{O}\setminus O=\partial O.$

4. Definizione:
$f\in C(E,\mathbf{R}^m)$ é $Lip_{loc}(E)$ se $\forall x\in E,$ $\exists B_{r(x)}(x)$ tale che $f\in Lip(B_{r(x)}(x)).$

Provare che

$$f\in Lip_{loc}(K),\quad K\ \text{compatto}\quad\Rightarrow\quad f\in Lip(K)$$

Se no, $\exists x_j, y_j \in K : \|f(x_j) - f(y_j)\| \, \|x_j - y_j\|^{-1} \to +\infty$. *Passando eventualmente a sottosuccessioni, possiamo supporre che* $x_j \to_j x \in K, y_j \to_j y \in K$. *Siccome* f *é limitata, necessariamente* $\|x_j - y_j\| \to 0$ *e quindi* $x = y$. *Ma* $x_j, y_j \in B_{r(x)}(x)$ *per* j *grande e* $f \in Lip(B_{r(x)}(x))$, *contraddizione.*

5. Provare con un esempio che non é vero in generale che da ogni ricoprimento aperto si puó estrarre un sottoricoprimento numerabile.

Sia $X = l^\infty$ *dotato della metrica* $\|x\|_\infty := \sup_n |x(n)|$. *Sia* $E = 2^{\mathbf{N}} = \{\alpha : \mathbf{N} \to \{0,1\}$. *Questo insieme é non numerabile. Siccome* $\alpha \neq \beta \in l^\infty \Rightarrow \|\alpha - \beta\|_\infty = 1$, *la famiglia (non numerabile) di aperti disgiunti* $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$ *é un ricoprimento di* E *e, chiaramente, cessa di essere tale non appena si lasci da parte anche un solo* $B_{\frac{1}{2}}(\alpha))$.

6. Mostrare, con un esempio, che non é vero in generale che ogni successione limitata in uno spazio normato ammette una estratta convergente.

Sia $E = l^2$ *dotato della norma* $\|\alpha\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha(j)|2\right)^{\frac{1}{2}}$. *Siano* $e_j(i) := \delta_{ij}$. *Allora* $\|e_n - e_m\| = 2$ *se* $n \neq m$ *e quindi* e_n *non ha estratte convergenti, dato che nessuna sua sottosuccessione é di Cauchy (una successione* x_n *in uno spazio metrico é di Cauchy se per ogni* $\epsilon > 0$ *esiste* n_ϵ *tale che* $\|x_n - x_m\| \leq \epsilon$ *se* $n, m \geq n_\epsilon$*; ovviamente ogni successione convergente é di Cauchy).*