AM210 2011-12: Tracce delle lezioni- V Settimana

REGOLA DELLA CATENA

Siano $f : O \to \mathbf{R}^m$ differenziabile in $x \in O \subset \mathbf{R}^n$, $g : f(O) \to \mathbf{R}^p$ differenziabile in $f(x)$. Allora $g \circ f$ é differenziabile in x e

$$d(g \circ f)(x) \;=\; dg(f(x)) \circ df(x) \qquad\qquad J_{g\circ f}(x) \;=\; J_g(f(x))\, J_f(x)$$

Prova. $\quad g\left(f(x+h)\right) = g\left(f(x) + df(x)h + \circ(\|h\|)\right) =$

$$g(f(x)) + dg(f(x))[df(x)h + \circ(\|h\|)] + \omega(df(x)h + \circ(\|h\|))$$

ove $\quad \|\omega(k)\| \le \epsilon\|k\| \quad$ se $\quad \|k\| \le \delta_\epsilon. \qquad$ Dunque

$$g(f(x+h)) \;=\; g(f(x)) \;+\; dg(f(x)) \circ df(x)h + \;\circ(\|h\|) + \omega(df(x)h + \circ(\|h\|))$$

Ma siccome $\|df(x)h + \circ(\|h\|)\| \;\le\; \delta_\epsilon$ se $\|h\| \;\le\; \delta'_\epsilon$, abbiamo che, per tali h, $\|\omega(df(x)h + \circ(\|h\|)\| \le \epsilon\|df(x)h + \circ(\|h\|)\| \le C\epsilon\|h\|$. Da qui la tesi.

L'affermazione sulle matrici Jacobiane segue dal fatto che la matrice rappresentativa del prodotto di matrici é il prodotto delle matrici rappresentative (vedi sotto).

NOTA. Se indichiamo con $\mathcal{A}_L$, $\mathcal{A}_U$ e $\mathcal{A}_{U\circ L}$ le matrici rappresentative di $L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, di $U \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$ e di $U \circ L \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, allora

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;=\; \mathcal{A}_U\, \mathcal{A}_L$$

(prodotto di matrici).

Infatti , indicate con $e_j, j = 1, \ldots, n$, $\hat{e}_i, i = 1, \ldots, m$, $\check{e}_l, l = 1, \ldots, p$ le basi (canoniche) in $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p$, si ha

$$\mathcal{A}_U \;=\; (< U(\hat{e}_i), \check{e}_l >)_{i=1,\ldots,m,l=1,\ldots,p} \qquad\qquad \mathcal{A}_L \;=\; (< Le_j, \hat{e}_i >)_{j=1,\ldots,n,i=1,\ldots,m}$$

$$\mathcal{A}_{U\circ L} \;= (< (U \circ L)(e_j), \check{e}_l >)_{j=1,\ldots,n;l=1,\ldots,p}$$

D'altra parte, $\qquad < (U \circ L)(e_j), \check{e}_l > \;\; =$

$$< U\left(\sum_{i=1}^{m} < L(e_j), \hat{e}_i > \hat{e}_i,\right) \check{e}_l > \;=\; \sum_{i=1}^{m} < Le_j, \hat{e}_i > < U(\hat{e}_i), \check{e}_l >$$

é l'elemento di posto lj della matrice prodotto

$$(< U(\hat{e}_i), \check{e}_l >)_{i=1,\dots,m,l=1,\dots,p} (< Le_j, \hat{e}_i >)_{j=1,\dots,n,i=1,\dots,m}$$

Un esempio: il gradiente in coordinate polari.

Data $f \in C^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, scriviamo f in coordinate polari: $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Allora,

$$g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\cos\theta - \frac{1}{\rho}g_\theta\sin\theta$$

$$f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho\sin\theta + \frac{1}{\rho}g_\theta\cos\theta$$

$$|\nabla f|^2(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_\rho^2(\rho, \theta) + \frac{1}{\rho^2}g_\theta^2(\rho, \theta)$$

Corollario: derivazione lungo un cammino.

Siano $\gamma \in C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$, $f \in C^1(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Allora

$$\frac{d}{dt}f(\gamma(t)) \; = < \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) > = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\gamma(t))\dot{\gamma}_j(t)$$

ESEMPIO

Sia $f \in C^1(\mathbf{R}^2)$ e sia $\gamma C^1((0,1), \mathbf{R}^2)$ tale che $f(\gamma(t)) = 1 \; \forall t \in (0,1)$. Allora

$$< \nabla f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) >= 0 \quad \forall t \in (0,1)$$

Il TEOREMA DEL VALOR MEDIO

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, O aperto convesso in $\mathbf{R}^n$. Allora

$$|f(u) - f(v)| \; \leq \; ||u - v|| \; \sup_{t \in [0,1]} \|\nabla f(v + t(u - v))\|$$

Infatti $\quad |f(u)-f(v)| \;=\; |\int\limits_0^1 [\frac{d}{dt}f(v+t(u-v))]\ dt| \;=$

$$|\int\limits_0^1 < \nabla f(v+t(u-v)), u-v > \ dt| \;\le\; ||u-v|| \sup_{t\in[0,1]} \|\nabla f(v+t(u-v))\|$$

Corollario 1 Sia $f \in C^1(O)$, O aperto connesso. Allora

$$\nabla f(u) \;=\; 0 \ \forall u \in O \quad \Rightarrow \quad f \equiv \text{ cost. } \quad \text{in} \quad O$$

Prova. Il teorema del valor medio implica che f é costante sui dischi. In particolare, se $x_0 \in O$, $\{x \in O : \ f(x) = f(x_0)\}$ é aperto, al pari di $\{x \in O : \ f(x) \neq f(x_0)\}$. D'altra parte, $O = \{x \in O : \ f(x) = f(x_0)\} \cup \{x \in O : \ f(x) \neq f(x_0)\}$ e quindi siccome O é connesso, si ha allora che $\{x \in O : \ f(x) \neq f(x_0)\} = \emptyset$.

Corollario 2. Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$. Allora f é **localmente Lipschitziana** in O:

$$\forall \ \overline{B}_r(x_0) \subset O, \exists L = L(r, x_0) : \qquad \|f(x) - f(y)\| \le L\|x-y\| \quad \forall \, x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Prova. Intanto, dal Teorema del valor medio

$$|f_i(x) - f_i(y)| \le \sup_{z \in \overline{B}_r(x_0)} \|\nabla f_i(z)\| \quad \|x-y\| \qquad \forall \quad x, y \in \overline{B}_r(x_0)$$

Quindi, presi x, y in $\overline{B}_r(x_0)$, risulta

$$\|f(x)-f(y)\|^2 = \sum_{i=1}^m |f_i(x) - f_i(y)|^2 \le \quad \|x-y\|^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\sup_{z \in B_r(x_0)} \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z) \right| \right]^2$$

DERIVATE SUCCESSIVE

Sia $f \in C^1(O, \mathbf{R})$, $O \subset \mathbf{R}^n$ aperto. Se f_{x_j} sono a loro volta derivabili, allora

$$f_{x_i x_j} \;=\; \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \;:=\; \frac{\partial}{\partial x_i} \, \frac{\partial f}{\partial x_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n$$

sono le derivate seconde.

Se $f_{x_i x_j} \in C(O)$, $\forall i, j = 1, \ldots, n$, f si dice di classe $C^2(O)$.

LEMMA DI SCHWARTZ

$$f \in C^2(O) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \quad \forall i,j = 1,\ldots,n, \quad \forall x \in O$$

FORMULA DI TAYLOR (al secondo ordine)

Sia $f \in C^2(D_r(u))$. Allora:

$$f(u+h) \ = \ f(u) + \ < \nabla f(u)\ ,\ h > \ + \frac{1}{2} < H_f(u)\, h,\ h > \ + \ \circ\, (||h||^2)$$

Prova. Sia $u = (x_1, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$. Posto $\varphi(t) := f(u + th)$, é

$$\varphi(0) \ = \ f(u), \quad \varphi(1) \ = \ f(u+h)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = \frac{d}{dt} f(u+th) \ = \ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th) h_j$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}(t) = \frac{d^2}{dt^2} f(u+th) = \sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_j}(u+th) h_j \ =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(u+th) h_i h_j \ = < H_f(u \ + \ t\, h)\, h,\ h >$$

Ma $\quad \varphi(1) \ = \ \varphi(0) \ + \ \varphi'(0) \ + \ \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\, dt \quad$ e quindi

$$f(u+h) \ = \ f(u) \ + < \nabla f(u)\ ,\ h > \ + \frac{1}{2} < H_f(u)h, h > \ +$$

$$+ \int_0^1 (1-t) \ < \ [H_f(u+th) \ - \ H_f(u)]\, h, h > \ dt$$

Stima del resto: $\quad \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta_\epsilon > 0 : \ |t| \le \delta_\epsilon \ \Rightarrow \ |f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u)| \le \epsilon \Rightarrow$

$$|\sum_{i,j=1}^{n} \left[f_{x_i x_j}(u+th) - f_{x_i x_j}(u) \right] \ h_i h_j \ | \ \le n^2 \epsilon ||h||^2$$

COMPLEMENTI

1. Lipschitzianitá sui compatti

Se $f \in C^1(O, \mathbf{R}^m)$ allora f é Lipschitziana sui compatti di O :

$$\forall K \subset O \text{ compatto } \exists L = L(K): \qquad \|f(x) - f(y)\| \le L\|x - y\| \qquad \forall \quad x, y \in K$$

Prova. Siccome $x, y \in K, \|x - y\| \ge r \quad \Rightarrow \quad \frac{\|f(x)-f(y)\|}{\|x-y\|} \le \frac{2}{r} \sup\limits_{z\in K} \|f(z)\|$, basta provare che

$$\exists r > 0, \quad L > 0: \quad x', x'' \in K, \quad \|x' - x''\| \le r \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \le L\|x' - x''\|$$

Dalla compattezza di K segue che

$$\exists x_j \in K,\ r_j > 0,\ j = 1, \dots, p \quad \text{tali che} \quad \overline{B}_{r_j}(x_j) \subset O \quad \text{e} \quad K \subset \bigcup_{j=1}^{p} B_{\frac{r_j}{2}}(x_j).$$

Per quanto sopra,

$$\exists L_j > 0: \quad x', x'' \in K \cap \overline{B}_{r_j}(x_j) \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \le L_j\|x' - x''\|$$

Sia $0 < r \le r_j \forall j$, $L := maxL_j$. Se $x', x'' \in K, \|x' - x''\| \le \frac{r}{2}$ e, diciamo, $x' \in B_{\frac{r_j}{2}}(x_j)$ si ha quindi che

$$\|x'' - x_j\| \le \frac{r}{2} + \frac{r_j}{2} \le r_j \quad \Rightarrow \quad \|f(x') - f(x'')\| \le L\|x' - x''\|$$

2. Il laplaciano in coordinate polari. Sia $f \in C^2(\Omega)$, $\quad \Omega \subset \mathbf{R}^n$ aperto.

$$\text{Laplaciano di} f: \qquad \Delta f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Sia $n = 2$ e scriviamo f in coordinate polari: $g(\rho, \theta) := f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Provare che

$$(\Delta f)(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho}$$

Si ha

$$g_\rho = f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\cos\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\sin\theta$$

$$g_{\rho\rho} = f_{xx}\cos^2\theta + 2f_{xy}\sin\theta\cos\theta + f_{yy}\sin^2\theta$$

$$g_\theta = -f_x(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\sin\theta + f_y(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\cos\theta$$

$$g_{\theta\theta} = \rho^2 \left[f_{xx} \sin^2\theta - 2 f_{xy} \sin\theta\cos\theta + f_{yy}\cos^2\theta - \frac{1}{\rho}(f_x\cos\theta + f_y\sin\theta) \right]$$

Quindi, essendo $f_x\cos\theta + f_y\sin\theta = g_\rho$, troviamo

$$g_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2} g_{\theta\theta} + \frac{g_\rho}{\rho} = (f_{xx} + f_{yy})\,(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

3. Calcolare ΔU, ove $U(x,y) = \log(x^2+y^2)$, $\quad x^2+y^2>0$.

4. Sia $N \geq 3$. Sia $U(x) = \frac{1}{\|x\|^{N-2}}$, $\quad x \in \mathbf{R}^N$, $\quad \|x\| > 0$. Calcolare ΔU.

5. Sia $f \in C^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. Provare che

$$\exists c > 0 : \quad < H_f(x)h, h > \, \geq c\|h\|^2 \quad \forall h \in \mathbf{R}^n \;\Rightarrow\; \forall y \in \mathbf{R}^n \; \exists! x \in \mathbf{R}^n : \quad \nabla f(x) = y$$

Prova. Fissati x, y, poniamo $\varphi(t) :=< \nabla f(tx + (1-t)y), x - y >$. É

$$\varphi'(t) \;=< H_f(tx + (1-t)y)\,(x-y), x-y > \geq \; c\,\|x-y\|^2$$

$$< \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y >= \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \geq c\|x-y\|^2$$

Ció implica in particolare l'unicitá: $\quad \nabla f(x) = \nabla f(y) \Rightarrow \|x-y\| = 0$. $\quad$ Inoltre

$$f(x) \;=\; f(0) \;+\; \int_0^1 \tfrac{d}{dt} f(tx)dt \;=\; f(0) \;+\; \int_0^1 \; < \nabla f(tx) - \nabla f(0) + \nabla f(0), x > dt \geq$$

$$f(0) + < \nabla f(0), x > + \frac{c}{2}\|x\|^2$$

e quindi per ogni fissato y la funzione $x \to f(x) - < x, y >$ é coerciva e continua e quindi ha un minimo globale. Dunque l'equazione $\nabla(f(x) - < x, y >) = 0$ ha soluzione, e cioé l'equazione $\nabla f(x) = y$ ha soluzione.