AM210 2011-2012: Appello B

TEMA 1 Sia K sottoinsieme di $\mathbf{R}^n$ dotato della proprietá seguente

$$O_\alpha \subset \mathbf{R}^n \text{ aperti, } K \subset \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} O_\alpha \quad \Rightarrow \quad \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \text{ tali che } K \subset \bigcup_{i=1}^{p} O_{\alpha_i}$$

Stabilire, argomentando, se

(i) $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \quad \Rightarrow \quad f$ é uniformemente continua in K.

(ii) $f \in Lip_{loc}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}), \quad \Rightarrow \quad f$ é Lipschitziana in K.

ESERCIZIO 1. Sia $f(x,y) = \frac{\cos(xy)-1}{x^2+y^4}$ se $x^2 + y^2 > 0$, $f(0,0) = 0$.

Stabilire se f é Lipschitziana, o anche solo uniformemente continua, in $\mathbf{R}^2$.

TEMA/ESERCIZIO 2

(i) Sia Ω sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^n$, $f \in C^1(\Omega, \mathbf{R})$. Stabilire, argomentando, se é vero che

$$\nabla f \equiv 0 \quad in \quad \Omega \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{é costante in } \Omega$$

Stabilire eventualmente, ed argomentando, sotto quali eventuali ulteriori ipotesi tale implicazione é certamente vera.

(ii) Sia Ω sottoinsieme aperto di $\mathbf{R}^2$. Sia $f = (f_1, f_2) \in C^1(\Omega, \mathbf{R}^2)$.

Mostrare perché é vero che

$$\exists F \in C^2(\Omega): \quad \nabla U \equiv f \quad in \quad \Omega \quad \Rightarrow \quad f_{1,y} = f_{2,x}$$

e dire, argomentando, in quali ipotesi tale F, se esiste, é sicuramente unica.
Stabilire poi, argomentando, se la condizione $f_{1,y} = f_{2,x}$ é, viceversa, sufficente ad assicurare l'esistenza di tale F.
Stabilire, argomentando, sotto quali eventuali ulteriori ipotesi tale F sicuramente esiste e dare in tal caso un procedimento per ili calcolo di tale F.
Studiare, ed eventualmente determinare, l'esistenza di una F tale che

$$\nabla F(x,y) = \left(\frac{y}{1+x^2y^2}, \frac{x}{1+x^2y^2}\right), \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2$$

TEMA/ESERCIZIO 3. Scrivere la formula di derivazione per funzioni composte ed applicarla per ottenere, data $\varphi = (\varphi_1(u,v), \varphi_2(u,v))$ in $C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$ tale che

$$\varphi_{1,u} = \varphi_{2,v}, \qquad \varphi_{1,v} = -\varphi_{2,u}$$

(per cui $(\Delta\varphi_1)(u,v) = (\Delta\varphi_2)(u,v) = 0$ e $(\det J_\varphi)(u,v) = |\nabla\varphi_1(u,v)|^2 = |\nabla\varphi_2(u,v)|^2 \quad \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2$) le seguenti formule

(i) Sia $U \in C^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, allora

$$\Delta(U \circ \varphi)(u,v) = (\Delta U)(\varphi(u,v)) \det J_\varphi(u,v) \qquad \forall (u,v) \in \mathbf{R}^2$$

(ii) Sia $U(x,y) = \log \frac{1}{1-x^2-y^2}$. Calcolato ΔU, provare che

$$\Delta(U \circ \varphi) = 4e^{U\circ\varphi} \qquad in \quad \mathbf{R}^2$$

TEMA/ESERCIZIO 4.

(i) **(Diseguaglianza di Bessel)** Sia $f \in C_{2\pi}$. Siano $\hat{f}_n$ i suoi coefficenti di Fourier. Provare che

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{f}_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

(ii) Sia $f \in C^\infty(\mathbf{R}), 2\pi$ periodica e a media nulla, cioé tale che $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = 0$. Provare, usando gli sviluppi in serie di Fourier, che esiste una ed una sola $u \in C^\infty, 2\pi$ periodica e a media nulla, tale che

$$u''(t) = f(t) \qquad \forall t \in \mathbf{R}$$

Esprimere i coefficenti di Fourier di u mediante quelli di f e stimare la norma l^2 della serie dei coefficenti di Fourier di u mediante la norma l^2 dei coefficenti di Fourier di f.

TEMA/ESERCIZIO 5 . Dato un sistema differenziale di tipo Hamiltoniano, con funzione Hamiltoniana H, stabilire, argomentando se é vero che

H coerciva $\Rightarrow$ le soluzioni del sistema sono definite per tutti i tempi

Stabilire se l'equazione differenziale

$$u'' + u - \cos u = 0$$

si puó scrivere come sistema hamiltoniano e se tali argomenti, od altri, permettono di stabilire l'esistenza globale delle soluzioni.