Tutorato di AM210

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 1: Spazi metrici

Esercizio 1.1. Sia X lo spazio delle successioni reali. Provare che $\forall x \in X \;\; 1 \leq p \leq q \leq \infty$ si ha $||x||_q \leq ||x||_p$. Dedurne che $\ell^p \subset \ell^q \;\; \forall 1 \leq p \leq q \leq \infty$
(*Suggerimento.* considerare prima il caso $q = \infty$, e poi per $q < \infty$ mostrare che $||x||_q^q \leq ||x||_p^q$)

Esercizio 1.2. Sia $x_n(k) := \dfrac{e^{-\frac{k}{n}}}{n}$, $k \in \mathbb{N}$. Calcolare $||x_n||_1$, $||x_n||_2$, studiare la convergenza di $\{x_n\}_{n\geq 1}$ in ℓ_1, ℓ_2 e dedurre che le norme $||\cdot||_1$, $||\cdot||_2$ non sono equivalenti

Esercizio 1.3. Sia $x := \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di successioni definita come $x_n(k) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \end{cases}$

(1.3.1) Provare che $x_n \in \ell^p \;\; \forall 1 \leq p \leq \infty, \;\; \forall n \in \mathbb{N}$.

(1.3.2) Provare che $\{x_n\}$ è una successione limitata in $\ell^p \;\; \forall 1 \leq p \leq \infty$, cioè

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_p < +\infty \quad \forall 1 \leq p \leq \infty$$

(1.3.3) Provare che $\{x_n\}$ non ha sottosuccessioni convergenti in ℓ^p per alcun $1 \leq p \leq \infty$

(*Suggerimento: per l'ultimo punto, mostrare che x_n non ha sottosuccessioni di Cauchy.*)

Esercizio 1.4 (il Teorema di Pitagora)**.** Provare che

$$||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } \langle x, y \rangle = 0$$

Esercizio 1.5 (la regola del parallelogramma)**.** Provare che

$$\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|^2 + \left|\left|\frac{x-y}{2}\right|\right|^2 = \frac{||x||^2 + ||y||^2}{2}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

Esercizio 1.6 (caratterizzazione topologica della continuità)**.** Provare che

$$f \in \mathscr{C}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right) \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(A) \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n \quad \forall A \text{ aperto in } \mathbb{R}^m$$