Tutorato di AM210

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini

Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 3: Limiti e continuità in più variabili — Parte 2

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Esercizio 3.1. Calcolare (se esistono) i seguenti limiti:

(3.1.1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}\tan\left(y^2\right)$

(3.1.2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$

(3.1.3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

(3.1.4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+\sqrt{x^2+y^2}\cos\left(x^2+y^5\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(3.1.5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log\left(x^2+y^2\right)$

(3.1.6) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y^{\frac{7}{4}}z^{\frac{2}{3}}}{\left(x^4+y^2+z^4\right)\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Nel punto (3.1.3), notare che il limite è 0 lungo tutte le rette

Esercizio 3.2. Discutere la continuità delle seguenti funzioni (definite su tutto $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^3$))

(3.2.1) $f_1(x,y) := \begin{cases} y+\frac{1}{y}\arctan\left(x^2y\right) & \text{se } y\neq 0 \\ 0 & \text{se } y=0 \end{cases}$

(3.2.2) $f_2(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{y-x}\int_x^y e^{t^2}\mathrm{d}t & \text{se } x\neq y \\ e^{xy} & \text{se } x=y \end{cases}$

(3.2.3) $f_3(x,y) := \begin{cases} \frac{\log\left(\sqrt{1+\sqrt{x^2+(y-1)^4}}\right)}{\sqrt{x^2+(y-1)^4}} & \text{se } (x,y)\neq(0,1) \\ \frac{1}{2} & \text{se } (x,y)=(0,1) \end{cases}$

(3.2.4) $f_4(x,y,z) := \begin{cases} \frac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & \text{se } (x,y,z)\neq(0,0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y,z)=(0,0,0) \end{cases}$

Esercizio 3.3. Discutere, al variare dei parametri $\alpha_1,\cdots,\alpha_n,\beta>0$, se si può estendere con continuità nell'origine la funzione

$$f(x_1,\cdots,x_n) := \frac{|x_1|^{\alpha_1}\cdots|x_n|^{\alpha_n}}{\left(x_1^2+\cdots+x_n^2\right)^{\beta}}$$

Esercizio 3.4. Sia

$$f(x,y) := -\frac{e^{\cos(x^2y)}}{3+x^2+y^2+\sin^2\left(x^4+y^4\right)}$$

Provare che f ha un minimo ma non un massimo e calcolare $\min_{\mathbb{R}^2} f$, $\sup_{\mathbb{R}^2} f$

Esercizio 3.5. Sia

$$x_n(k) := \frac{1}{k}\sqrt{2-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{kn}}\right)}$$

Provare che

(3.5.1) $x_n\in\ell^p \quad \forall p>1$ e $x_n\notin\ell^1$

(3.5.2) $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{\ell^p} x \quad \forall p>1$ per una opportuna successione x e che $||x_n-x||_1\to 0$

Esercizio 3.6. Sia

$$f:(x,y)\in\mathbb{R}^2\longmapsto x\chi_{\mathbb{Q}}(y)+y\chi_{\mathbb{Q}}(x)\in\mathbb{R}$$

Provare che $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ ma che

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right),\quad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} f(x,y)\right)$$

non esistono