Tutorato di AM210

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 5: Differenziabilità, massimi e minimi in più variabili

---

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Esercizio 5.0. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile. Provare che, comunque preso $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \boldsymbol{\nu} \rangle$$

Dedurre che in tal caso l'applicazione $L_{x_0} : \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\nu}}(x_0) \in \mathbb{R}$ è lineare

Esercizio 5.1. (piano tangente ad un grafico di funzione) Si determini l'espressione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) := x^2 + 2y^2$$

in un generico punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Esercizio 5.2. (piano tangente ad una superficie in forma parametrica) Si consideri la calotta superiore di un ellissoide

$$\mathcal{E} := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z \geq 0 \right\}$$

(5.2.1) Si verifichi che risulta

$$\mathcal{E} = \left\{ \left(u, v, c\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}} \right) \,\middle|\, (u,v) \in D \right\}, \quad D := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

cioè che $\mathbf{x}(u,v) := \left(u, v, c\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}} \right)$, $(u,v) \in D$, è una parametrizzazione di $\mathcal{E}$

(5.2.2) Si determini il piano tangente $T_{x_0}\mathcal{E}$ nel punto $x_0 := \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}} \right)$

Esercizio 5.3. Provare che l'espressione del laplaciano in coordinate polari è

$$\Delta f = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho \frac{\partial f}{\partial \varrho} \right) + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

Verificare quindi che la soluzione fondamentale $u(x,y) := \log\left(x^2 + y^2\right)$ soddisfa effettivamente $\Delta u = 0$

Esercizio 5.4. Siano $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ e $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tali che

— $g(0) = 0$

— $f(t, g(t)) \equiv 0\ \forall t \in \mathbb{R}$

— $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$

Usando la regola di derivazione per funzioni composte, mostrare che

$$g'(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}$$

Girare, prego $\longrightarrow$

Esercizio 5.5.

(5.5.1) Calcolare $\nabla F(x,y)$, dove
$$F(x,y) := \int_{e^x+y}^{2xy} \log\left(1+t^2+\sin t\right) \mathrm{d}t$$

(5.5.2) Calcolare $J_{g\circ f}$, dove
$$g : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (xy, ze^x) \in \mathbb{R}^2 \quad f : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(x^2+y, \frac{y}{x^2+1}, x+y\right) \in \mathbb{R}^3$$

Esercizio 5.6. Determinare i punti stazionari delle seguenti funzioni (definite su tutto $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$) e stabilire quali di essi sono di massimo e quali di minimo locale

(5.6.1) $f_1(x,y) = x^4 - 2x^2 - y^4 + 2y^2$

(5.6.2) $f_2(x,y) = xy\left(x^2+y^2-1\right)$

(5.6.3) $f_3(x,y) = x^3 - 3xy^2$

(5.6.4) $f_4(x,y) = x^4 - x^3 \sin y$

(5.6.5) $f_5(x,y,z) = \sin(xyz)$

(5.6.6) $f_6(x,y) = \left(x^2-1\right)\left(y^2-1\right)$

(5.6.7) $f_7(x,y) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + y^4 - 2y^2$

(5.6.8) $f_8(x,y) = y^4 - y^3 \cos x$

(5.6.9) $f_9(x,y,z) = \sin^2(xyz)$