Tutorato di AM210

A.A. 2011/2012 — Docente: Prof. G. Mancini
Tutori: Vincenzo Morinelli, Gianluca Lauteri

Tutorato 6: Integrali dipendenti da parametro

Testi e soluzioni dei tutorati disponibili all'indirizzo `http://am210-1112.blogspot.com/`

Esercizio 6.1. Sia
$$f(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\log\left(x^2t^2+1\right)}{t^2+1}\mathrm{d}t$$

(6.2.1) Provare che f è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

(6.2.2) Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ f è continua

Esercizio 6.2. Sia $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1-e^{-xt^2}}{t}\mathrm{d}t$:

(6.2.1) Trovare il dominio di f.

(6.2.2) Provare che f è continua sul suo dominio di definizione

Esercizio 6.3. Sia
$$f(x,y) := \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-yt}}{t}\mathrm{d}t$$
Provare che $f \in \mathscr{C}((0,+\infty)\times(0,+\infty))$

Esercizio 6.4. Calcolare

(6.4.1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1} \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(6.4.2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx^2}\mathrm{d}x$

Esercizio 6.5. Sia $f_n(x) := \arctan(nx)$

(6.5.1) Provare che f_n converge puntualmente su $[0,1]$ ma non uniformemente.

(6.5.2) Provare che $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Dedurne che la convergenza uniforme è una condizione sufficiente ma non necessaria per il passaggio al limite sotto integrale