AM310 2012: V Settimana

SPAZI L^p: DUALITÁ E COMPATTEZZA DEBOLE

Sia μ misura su X, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; $\|.\|_p$ indicherá la norma in $L^p(X, \mu)$.

Siano $p, q > 1$ esponenti coniugati: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La diseguaglianza di Holder permette di mettere in relazione ('dualitá') L^p ed L^q mediante la forma bilineare e continua (che é tale grazie a Holder) su $L^p \times L^q$

$$< f, g >:= \int fg, \qquad | < f, g > | \le \|f\|_p \, \|g\|_q \qquad \forall f \in L^p, \, g \in L^q$$

Tale 'dualitá' supplisce il prodotto scalare in L^2 e permette di ritrovare una buona parte delle proprietá di L^2 (ovvero degli Hilbert).
Tale forma bilineare fornisce, in primo luogo, elementi di $(L^p)'$, il duale di L^p: se $g \in L^q$, allora $l_g(f) :=< f, g >$ é un funzionale lineare e continuo su L^p (continuo perché $|l_g(f)| \le \|f\|_p \, \|g\|_q$). Di piú l'applicazione

$$T : g \to l_g, \qquad l_g(f) := \int f \, g, \qquad g \in L^q$$

manda L^q nel duale di L^p in modo lineare ed isometrico, T **é una isometria lineare**:

$$\|g\|_q = \|T(g)\| \qquad \text{ove} \qquad \|T(g)\| := \sup_{\|f\|_p = 1} |l_g(f)| = \sup_{\|f\|_p = 1} |\int f \, g|$$

Infatti $\|T(g)\| \le \|g\|_q$. Poi, $\| \, |g|^{q-2} \, g \, \|_p^p = \int | \, |g|^{q-2} \, g \, |^p = \int |g|^q = \|g\|_q^q$ (in particolare, $g \in L^q$, $\int fg = 0 \quad \forall f \in L^p \Rightarrow g = 0$) e quindi

$$\|T(g)\| \ \ge \ \frac{|l_g(|g|^{q-2} \ g)|}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{\frac{q}{p}}} = \|g\|_q^{q - \frac{q}{p}} = \|g\|_q$$

Mostreremo che T **é suriettiva**.
Nel caso $p = 2$, tale fatto deriva dall'esistenza della proiezione ortogonale. La nozione di ortogonalitá si esprime qui attraverso la relazione $< f, g >= 0$. Siccome, come visto sopra, $f \in L^p \Rightarrow |f|^{p-2} f \in L^q$, diremo anche (con abuso di linguaggio) che $f \in L^p$ é ortogonale a $h \in L^p$ se $|f|^{p-2} f$ é ortogonale a h, cioé se $\int |f|^{p-2} fh = 0$.
La proprietá di L^2 (in quanto Hilbert) da cui deriva la proiezione ortogonale é l'identitá del parallelogramma, che possiamo anche scrivere

$$(\|f\|_2 + \|g\|_2)^2 + (\|f\|_2 - \|g\|_2)^2 = \|f + g\|_2^2 + \|f - g\|_2^2 \qquad \forall f, g \in L^2$$

Tale identitá non sussiste in L^p se $p \ne 2$, ma puó essere sostituita dalla

DISEGUAGLIANZA DI HANNER

$1 \le p \le 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\,\|f\|_p - \|g\|_p\,|^p \le \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$

$p \ge 2 \quad \Rightarrow \quad (\|f\|_p + \|g\|_p)^p + |\,\|f\|_p - \|g\|_p\,|^p \ge \|f+g\|_p^p + \|f-g\|_p^p \quad \forall f, g \in L^p$

Proiezione su un convesso chiuso. *Sia* $p > 1$, $\quad C \subset L^p \quad$ *chiuso e convesso. Allora* $\quad \forall h \in L^p, \quad \exists h_C \in C : \quad \|h - h_C\| \le \|h - g\| \quad \forall g \in C \quad$ *e* $\int |h - h_C|^{p-2}(h - h_C)\,(g - h_C) \;\le\; 0 \quad \forall g \in C.$ $\quad$ *Se* $V = \overline{V} \subset L^p$ *é lineare, allora* $\int |h - h_V|^{p-2}(h - h_V)\; g \;=\; 0 \quad \forall g \in V,$ $\quad$ *ovvero* $h - h_V$ *é ortogonale a* V

Prova. Sia $\quad f_n \in C \quad$ minimizzante: $\quad \|f_n - h\| \to_n d := \inf_{g \in C} \|h - g\|$. Basta provare che f_n é di Cauchy, perché allora

$\exists\ h_C \in C = \overline{C}$ tale che $\|f_n - h_C\| \to_n 0$ e quindi $\quad \|h - h_C\| = d$. $\quad$ Proviamo che

Hanner $\qquad \Rightarrow \qquad$ f_n **é di Cauchy.**

Caso $\quad p \ge 2$. $\quad$ Prendiamo, in Hanner, $f = f_n - h$, $\quad g = f_m - h$, e otteniamo

$$(2d + \circ(1))^p + \circ(1) = (\|f_n - h\|_p + \|f_m - h\|_p)^p + |\|f_n - h\|_p - \|f_m - h\|_p|^p$$

$$\ge \|f_n - f_m\|_p^p \;+\; \|f_n + f_m - 2h\|_p^p \ge \|f_n - f_m\|_p^p \;+\; 2^p d^p \quad \Rightarrow \quad \circ(1) \ge \|f_n - f_m\|_p^p$$

Caso $\quad 1 < p \le 2$. $\quad$ In Hanner, $f = h - \frac{f_n + f_m}{2}$, $\quad g = \frac{f_n - f_m}{2}$, danno

$$\left(\|h - \frac{f_n + f_m}{2}\|_p + \|\frac{f_n - f_m}{2}\|_p\right)^p \le \left[\|h - f_n\|_p^p + \|h - f_m\|_p^p\right] \le 2d^p + \circ(1)$$

Dalla convessitá di C segue $\|h - \frac{f_n + f_m}{2}\|_p \ge d$ ed allora

$$d^p\Big(1 + p\frac{\|f_n - f_m\|_p}{2d}\Big) \le d^p\Big(1 + \|\frac{f_n + f_m}{2d}\|_p\Big)^p \le 2d^p + \circ(1) \quad \Rightarrow$$

$$p\frac{\|f_n - f_m\|_p}{2d} \le 1 + \circ(1) \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f_m\| < 2d$$

perché $p > 1$. Quindi, usando di nuovo la convessitá in Hanner

$$(2d + \|f_n - f_m\|_p)^p + (2d - \|f_n - f_m\|_p)^p \le 2^{p+1} d^p + \circ(1)$$

e quindi, posto $\quad \phi(t) := \frac{(1+t)^p + (1-t)^p}{2}$, $\qquad \phi(\frac{\|f_n - f_m\|_p}{2d}) \le 1 + \circ(1)$.
Siccome $\phi'(t) \;>\; 0\; \forall t \in (0, 1]$ concludiamo che $\|f_n - f_m\|_p \to 0$ per $n, m \to +\infty$.

Infine, $\quad \varphi_g(t) := \int |h-[tg+(1-t)h_C)]|^p \geq \int |h-h_C|^p = \varphi_g(0) \quad \forall g \in C, \quad \forall t \in [0,1]$
$\Rightarrow \qquad 0 \leq \varphi'_g(0) = \int |h-h_C|^{p-2}(h-h_C)\,(h_C-g) \quad \forall g \in C.$

Definizione di convergenza debole in L^p. Sia $f_n \in L^p$:

$$f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Leftrightarrow \qquad \int f_n\, g\, d\mu \to \int f\, g\, d\mu \quad \forall\, g \in L^q$$

Dal Principio di Uniforme Limitatezza segue subito che

Proposizione.

$$f_n \rightharpoonup_n f \quad in\ L^p \qquad \Rightarrow \qquad \sup_n \|f_n\|_p < +\infty$$

Infatti i funzionali lineari e continui su L^q dati da $l_n(g) := \int f_n g,\ g \in L^q$ sono puntualmente limitati (convergono puntualmente a $l(g) := \int fg,\ g \in L^q$) e quindi $\sup_n \|l_n\| < \infty$. Ma $\|l_n\| = \|f_n\|_p$.

Proposizione.

(i) $\|f_n - f\|_p \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p (ma non viceversa)
(ii) $f_n \rightharpoonup_n f,\ g_n \rightharpoonup_n g,\quad$ in $L^p,\ \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \Rightarrow \quad \alpha f_n + \beta g_n \rightharpoonup_n \alpha f + \beta g$ in L^p
(iii) $f_n \rightharpoonup_n f$ in $L^p \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad$ e $\quad \liminf \|f_n\|_p \geq \|f\|_p$
(iv) $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $g_n \to g$ in $L^q \quad \Rightarrow \quad \int f_n\, g_n \to_n \int f\, g$
(v) $\overline{< g_i >} = L^q,\ \int f_n\, g_j \to_n 0 \quad \forall j,\ \sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \rightharpoonup_n 0$ in L^p

Prova. (i) $\quad |\int (f_n - f)\, g| \leq \|f_n - f\|_p\, \|g\|_q \to_n 0 \quad \forall\, g \in L^q \qquad$ (ii) ovvia

(iii) $|\int f_n\, g| \leq \|f_n\|_p\, \|g\|_q \ \Rightarrow\ |\int f\, g| \leq (\liminf_n \|f_n\|_p)\, \|g\|_q \quad \forall\, g \in L^q \ \Rightarrow$

$$\int |f|^p \ = \ |\int f\, (|f|^{p-2}\, f)| \ \leq \ \liminf_n \|f_n\|_p\, \|\, |f|^{p-1}\, \|_q = \liminf_n \|f_n\|_p\, (\int |f|^p)^{\frac{1}{q}}$$

(iv) $\sup_n \|f_n|_p < +\infty \ \Rightarrow$

$$|\int (f_n g_n - f g)| \leq |\int (f_n - f) g| + |\int (g_n - g) f_n| \leq |\int (f_n - f) g| + \|f_n\|_p \|g_n - g\|_q \to_n 0$$

(v) É $\int f_n\, g \to_n 0 \quad \forall g \in < g_j >$. Dato $g \in L^q$, siano $h_j \in < g_j >$ tali che $\|h_j - g\|_q \to_j 0$. Allora

$$|\int f_n g| \leq |\int f_n h_j| + \int |f_n||h_j - g| \qquad \Rightarrow \qquad \limsup_n |\int f_n g| \leq \|h_j - g\|_q \sup_n \|f_n\|_p \quad \forall j$$

e quindi $\limsup_n |\int f_n\, g| = 0$.

Lemma di Mazur *Sia C chiuso e convesso. Allora*

$$f_n \in C, \quad f_n \rightharpoonup_n f \qquad \Rightarrow \qquad f \in C$$

Prova. Indicata con f_C la proiezione di f su C, risulta

$$0 \leq \int |f - f_C|^{p-2}(f - f_C)\,(f_C - f_n) \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Quindi, passando al limite, si trova $0 \leq -\int |f - f_C|^p$ e quindi $f = f_C \in C$.

Teorema (IL DUALE DI L^p é L^q)
Sia $p > 1,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$ *Allora* $(L^p)'$ **é isometricamente isomorfo a** L^q.
Prova. Abbiamo visto che l'applicazione $T(g) := l_g,\ l_g(f) := \int f\, g,$, é isometria lineare di L^q nel duale di L^p. Proviamo ora che T **é suriettiva**:

$$\forall l \in (L^p)', \quad \exists!\ g = g_l \in L^q : \qquad l(f) \ = \int f\, g \quad \forall f \in L^p$$

Sia infatti $V := Ker\ l$. Se $l \neq 0$, V é sottospazio lineare chiuso proprio di L^p, e quindi esiste $h \in L^p : \ h \notin V$. Se $h_V \neq h$ é la sua proiezione su V, detta $g := |h - h_V|^{p-2}(h - h_V)$, si ha che $g \in L^q$ e

$$\int g\, v \ = \int |h - h_V|^{p-2}\,(h - h_V)\, v \ = \ 0 \quad \forall v \in V, \qquad \int g\, h > 0 \qquad \text{perché}$$

$\int g\, h = \int |h - h_V|^{p-2}(h - h_V)[(h - h_V) + h_V] = \int |h - h_V|^p.$ Ora,

$$\forall f \in L^p : \quad l(f - \frac{l(f)}{l(h)}\, h) = 0 \ \text{ e quindi } \ 0 = \int g\,(f - \frac{l(f)}{l(h)}\, h) = \int g\, f - \frac{l(f)}{l(h)} \int g\, h$$

e quindi
$$l(f) = \int \left[\frac{l(h)}{\int\ g\, h}\ g \right] f$$

Teorema (compattezza debole) *Sia L^p separabile. Allora*

$$\sup_n \|f_n\|_p < +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists f \in L^p, \ \ n_k \to_k +\infty : \quad f_{n_k} \rightharpoonup_k f$$

Prova. Sia u_n densa in L^p. É facile vedere (vedi Problema 1) che $g_n := |u_n|^{p-2} u_n$ é denso in L^q.

Siccome $\sup_n |\int f_n g_j| < +\infty \quad \forall j$ e quindi, per ogni j, la successione numerica $n \to \int f_n g_j$ ha una estratta convergente, si puó estrarre da f_n (metodo diagonale di Cantor) una f_{n_k} tale che

$$l(g_j) := \lim_k \int f_{n_k} g_j \qquad \text{esiste finito} \quad \forall j$$

e quindi $\qquad l(g) := \lim_k \int f_{n_k} g \qquad$ esiste finito $\quad \forall g \in < g_n >$

Inoltre, $\quad l \quad$ é chiaramente lineare su $< g_j >$, $\quad$ e

$$|l(g)| \quad \le \quad (\sup_n \quad \|f_n\|_p\,) \quad \|g\|_q \quad \forall g \in < g_j >$$

Dunque $\quad l$ si estende (in modo unico) a un funzionale lineare e continuo su tutto L^q, che continuiamo ad indicare l. Dal teorema di rappresentazione:

$$\exists f \in L^p : \qquad l(g) = \int f\, g \qquad \forall g \in L^q$$

Per quanto sopra, $\qquad \int f_{n_k} g_j \to_k l(g_j) = \int f g_j \quad \forall j$

e (punto v) della Proposizione) ció é sufficente a garantire che $\quad f_{n_k} \rightharpoonup_k f$.

Esercizi, problemi e complementi 5

Uniforme limitatezza in L^p: una dimostrazione diretta

$$h_n \in L^p, \quad \sup_n |\int h_n g| < +\infty \quad \forall g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \sup_n \|h_n\|_p < +\infty$$

Prova. Equivalentemente,

$$h_n \in L^p, \quad \sup_n \|h_n\|_p = +\infty \quad \Rightarrow \quad \exists g \in L^q : \quad \sup_n |\textstyle\int h_n g| = +\infty$$

Passando ad una sottosuccessione, possiamo supporre che $\|h_n\|_p \ge 4^n$, e quindi

$$f_n := \frac{h_n}{\|h_n\|_p} 4^n \quad \text{soddisfa} \qquad \|f_n\|_p = 4^n, \qquad \sup_n |\int f_n\, g| < +\infty \quad \forall g \in L^q$$

Sia $\quad g_n := \frac{|f_n|^{p-2} f_n}{\|f_n\|_p^{p-1}}$. Si ha $\qquad \int |g_n|^q = 1 \quad$ e $\quad \int f_n g_n = \|f_n\|_p = 4^n$. $\quad$ Poi

$$|\sigma_j| \le 1 \quad \Rightarrow \quad \| \sum_n^{n+m} \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \|_q \le \sum_n^{n+m} \frac{1}{3^j} \to_n 0 \quad \forall m \quad \Rightarrow$$

$$\hat{g} \,:=\, \sum_1^{\infty} \frac{\sigma_j}{3^j} g_j \in L^q \qquad \text{e} \qquad |\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j| \le \sum_{j>n} \frac{4^n}{3^j} \;=\; \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n \quad \forall n$$

Ora, i numeri σ_j si possono sciegliere in modo che $|\int f_n \hat{g}| \to +\infty$. $\quad$ Basta prendere

$$\sigma_1 := 1 \quad \text{e, induttivamente,} \quad \sigma_n := sign\left(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j\right) \qquad (\text{ sign } 0 := 1)$$

perché, con tale scelta , risulta

$$|\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j\,| \;=\; |\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j \;+\; \frac{\sigma_n}{3^n} \int f_n\, g_n| \;\geq\; (\frac{1}{3})^n \int f_n\, g_n = (\frac{4}{3})^n$$

Quindi $\quad |\int f_n\, \hat{g}| = |\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n g_j \;+\; \sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n g_j| \quad \geq$

$$\geq \left| |\sum_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j| \;-\; |\sum_{j>n} \frac{\sigma_j}{3^j} \int f_n\, g_j| \right| \geq \frac{1}{2}(\frac{4}{3})^n \to +\infty$$

Prova della diseguaglianza di Hanner Siccome la diseguaglianza é simmetrica in f, g, e certamente vera se $\|f\|_p\ \|g\|_p = 0$, possiamo supporre $\|f\|_p \geq \|g\|_p > 0$. Dividendo per $\|f\|_p^p$, ed avendo posto $\hat{f} := \frac{f}{\|f\|_p}$, $\hat{g} := \frac{g}{\|f\|_p}$ la diseguaglianza si riscrive,

$(*)\quad p \in [1,2]: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \;\Rightarrow\; (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \leq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$

$(**)\quad p \geq 2: \quad \|\hat{f}\|_p = 1, \|\hat{g}\|_p \leq 1 \;\Rightarrow\; (1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \geq \|\hat{f}+\hat{g}\|_p^p + \|\hat{f}-\hat{g}\|_p^p$

Ora, $(*), (**)$ si possono derivare da

Una diseguaglianza elementare.

$(\bullet)\quad 1 < p < 2 \quad\Rightarrow\quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \leq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s,t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$

$(\bullet\bullet)\quad 2 < p \quad\Rightarrow\quad a(r)|t|^p + b(r)|s|^p \geq |t+s|^p + |t-s|^p \quad \forall s,t \in \mathbf{R}, r \in (0,1]$

ove $\quad a(r) := (1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}, \quad b(r) := r^{1-p}\,[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}]$.

Proviamo che $(\bullet) \Rightarrow (*)$ (e $(\bullet\bullet) \Rightarrow (**)$). Da

$$(1+r)^p + (1-r)^p = [(1+r)^{p-1} + (1-r)^{p-1}] + r^p\, r^{1-p}[(1+r)^{p-1} - (1-r)^{p-1}] =$$

$= \; a(r) + b(r) r^p \qquad$ segue, posto $\quad r = \|\hat{g}\|_p$,

$(1+\|\hat{g}\|_p)^p + (1-\|\hat{g}\|_p)^p \;=\; \int a(r)|\hat{f}(x)|^p + b(r)|\hat{g}(x)|^p \quad$ perché $\quad \int |\hat{f}|^p = 1.$

Quindi, posto $\quad t = \hat{f}(x), \quad s = \hat{g}(x), \quad$ in $\quad (\bullet)$, $\quad$ otteniamo $\quad (*)$.

Prova di $(\bullet), (\bullet\bullet)$. Intanto, sono vere per $t = 0$: $\quad \forall r > 0$ si ha

$$b'(r) = \frac{p-1}{r^p}\,[\,(1-r)^{p-2} - (1+r)^{p-2}\,] > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad b'(r) < 0 \quad \text{se} \quad p > 2$$

Siccome $\quad b(1) = 2^{p-1} < 2$ se $p < 2$ $\quad$ e $\quad b(1) > 2$ se $p > 2$, $\quad$ si ha quindi che $1 < p < 2 \;\Rightarrow\; b(r) < 2$ in $(0,1]$ $\;$ mentre $\; p > 2 \quad \Rightarrow \quad b(r) > 2$ in $(0,1]$. Ovvero, $(\bullet)$ e $((\bullet\bullet))$ valgono per $t = 0$ e si possono dunque riscrivere, dividendo per $|t|^p$, nella forma equivalente

$$(\bullet) \quad 1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \leq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

$$(\bullet\bullet) \quad p > 2 \quad \Rightarrow \quad a(r) + b(r)|\tau|^p \geq |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \in \mathbf{R}$$

che infatti basta provare per ogni $\tau \geq 0$, perché la diseguaglianza é pari in τ.

Posto $\quad \gamma(r,\tau) := a(r) + b(r)\tau^p, \quad r \in (0,1], \tau \geq 0$, basta provare che

$$1 < p < 2 \quad \Rightarrow \quad \sup_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

$$p > 2 \quad \Rightarrow \quad \inf_{0<r\leq 1} \gamma(r,\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p \quad \forall \tau \geq 0$$

É $\quad a'(r) = (p-1)[(1+r)^{p-2} - (1-r)^{p-2}], \quad b'(r) = -\frac{a'(r)}{r^p}, \quad \gamma'(r) = a'(r)[1 - (\frac{\tau}{r})^p]$

$$a' < 0, \quad b' > 0 \quad \text{se} \quad p < 2 \quad \text{e} \quad a' > 0, \quad b' < 0 \quad \text{se} \quad p > 2 \quad \forall r > 0$$

In particolare, γ' si annulla esattamente in $r = \tau$, e $\gamma(\tau) = |1+\tau|^p + |1-\tau|^p$ é un massimo se $p < 2$ ed un minimo se $p > 2$. Quindi

$$\tau \leq 1 \qquad \Rightarrow \qquad (\bullet), (\bullet\bullet) \qquad \text{valgono}$$

Sia infine $\tau > 1$. $\quad$ Per quanto visto, se $\quad p < 2 \quad \delta := \frac{1}{\tau} < 1$ e $r \in (0,1]$ allora

$$a(r) + b(r)\delta^p \leq (1+\delta)^p + (1-\delta)^p \quad \text{e quindi} \quad \tau^p a(r) + b(r) \leq (1+\tau)^p + (1-\tau)^p$$

e vale la diseguaglianza opposta se $p > 2$. Basta allora provare che $\quad \forall r \in (0,1]$

$$a(r) + b(r)\tau^p \leq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p < 2$$

$$a(r) + b(r)\tau^p \geq a(r)\tau^p + b(r) \quad \text{se} \quad p > 2$$

E ció segue dal fatto che $\quad p < 2 \quad \Rightarrow \quad a' - b' = a'(1 + \frac{1}{r^p}) < 0$ in $(0,1]$ $\quad$ e quindi

$$a(1) = b(1) = 2^{p-1} \quad \Rightarrow \quad a(r) \geq b(r) \;\; \forall r \in (0,1] \quad \Rightarrow \quad [a(r) - b(r)]\,\tau^p \geq a(r) - b(r)$$

$$\Rightarrow \quad a(r) + \tau^p b(r) \leq \tau^p \, a(r) + b(r)$$

Se invece $p > 2$, é $a' - b' > 0$ in $(0, 1]$, e quindi si ottiene la diseguaglianza opposta.

Problema 1 . Provare che

$$L^p \quad \text{separabile} \quad , \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \Rightarrow \quad L^q \quad \text{separabile}$$

e, piú in generale, se E é un Banach, allora

$$E' \quad \text{separabile} \qquad \Rightarrow \quad E \quad \text{separabile}$$

Provare con un esempio che l'implicazione E separabile $\Rightarrow$ E' separabile é falsa.

Suggerimento. Usare il 'fatto' seguente: se V é sottospazio chiuso proprio di E, allora esiste un $x' \in E'$, $x' \neq 0$ tale che $x'(x) = 0$ per ogni $x \in V$

Problema 2. Sia $p \geq 2$. Provare che $\|.\|_p$ é **uniformemente convessa**:

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1, \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\|_p \to_n 1 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - g_n\|_p \to_n 0$$

Suggerimento: usare la diseguaglianza di Hanner

Problema 3. Sia $p \geq 2$. Provare che

$$f_n \rightharpoonup_n f, \quad \|f_n\|_p \to \|f\|_p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Suggerimento: usare la uniforme convessitá della norma

Esercizio 1 . Dare un esempio di L^p non separabile.

Esercizio 2. Sia $f_n \rightharpoonup_n f$ in L^p, $p > 1$.

(i) Provare con un esempio che f_n può non convergere in alcun punto, può non convergere in misura. Può accadere che f_n non abbia alcuna sottosuccessione convergente q.o.?

(ii)Provare che se $f_n(x) \to g(x)$ q.o. allora $g = f$ q.o.

(iii) Provare che se $\int |f_n|^p \to \int |f|^p$ allora f_n ha almeno una sottosuccesione convergente q.o. ad f.

Esercizio 3 Sia $f_n \to f$ quasi ovunque. Provare che

$$\mu(E) < +\infty \quad \Rightarrow \quad f_n \chi_E \to f \chi_E \quad \text{in misura}$$

Esercizio 4 Sia $f_n \in L^p$ limitata: $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$. Provare che

$f_n \to f$ q.o., oppure in misura, $\Rightarrow$ f_n converge a f debolmente.

Suggerimento Fissata $\phi \in L^1 \cap L^q$, usare la diseguaglianza

$$|\int (f_n - f)\phi| \leq (||f_n||_p + ||f||_p)(\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\delta\}} |\phi|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |\phi|$$

Esercizio 5 Siano $f_n \in L^p$. Provare che

(i)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(ii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iii)$f_n \to f$ in misura, $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(iv)$f_n \to f$ q.o., $f_n \to \overline{f}$ in $L^p, \Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(v)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ debolmente $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vi)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ in misura $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

(vii)$f_n \to f$ debolmente $f_n \to \overline{f}$ q.o. $\Rightarrow f = \overline{f}$ q.o.

Esercizio 6 Sia $f \in L^p$. Provare che

(i) $\mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f|^p \geq t\}) \leq \frac{||f||_p^p}{t}$

(ii) $t^p \mu(\{x \in \mathbf{R}^{n+1} : |f(x)| \geq t\}) \to 0$ al tendere di t a 0 e a $+\infty$.

Provare con un esempio che tale condizione non garantisce l'appartenenza di f ad L^p.

(iii) Sia $\mu(X) < +\infty$. Siano $f_n \in L^p, p > 1$, tale che $\sup_n ||f_n||_p < +\infty$, e $f_n \to f, q.o.$. Provare che $f_n \to f$ in $L^q \quad \forall q < p$.

CENNI DI SOLUZIONI

Problema 1 . Sia D denso in L^p. Sia $g \in L^q$. Allora

$$f := |g|^{q-2}g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \exists f_n \in D: \quad f_n \to f \quad q.o. f_n \quad \text{equidominata in} \quad L^p$$

$$\Rightarrow \quad g_n := |f_n|^{p-2}f_n \to |f|^{p-2}f = g \quad \text{equidominata in} \quad L^q$$

$$\Rightarrow \quad \{|f|^{p-2}f: \quad f \in D\} \quad \text{é denso in} L^q$$

Sia E' separabile, $\{x'_n: \quad n \in \mathbf{N}\}$ denso in E'. Sia

$$x_n \in E: \qquad \|x_n\| = 1, \quad x'_n(x_n) \geq \frac{1}{2}\|x'_n\|. \qquad \text{Allora}$$

$$x'(x_n) = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\|x'_n\| \leq x'_n(x_n) = x'_n(x_n) - x'(x_n) \leq \|x'_n - x'\| \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

$$\Rightarrow \quad \|x'\| \leq \|x' - x'_n\| + \|x'_n\| \leq 3\|x' - x'_n\| \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad x' = 0$$

Ció comporta che V, chiusura di $< x_n >$, é densa (altrimenti esisterebbe $x' \in E'$, non nullo che si annulla su V) e quindi anche l'insieme delle combinazioni lineari degli x_n e a coefficenti razionali (che é un insieme numerabile) é denso in E.

Un esempio é dato da l^1, che é separabile (le combinazioni lineari dei vettori $e_i, i \in \mathbf{N}, \ e_i(j) = \delta_{ij}$ sono dense in l^1) mentre il suo duale, che é l^∞, non é separabile: l'insieme $\{x_{ij} = e_i + e_j: \quad i,j \in \mathbf{N}\}$ é non numerabile e $i,j \neq l,m \quad \Rightarrow$ $\|x_{ij} - x_{l,m}\|_\infty = \sup_n |x_{ij}(n) - x_{l,m}(n)| = 1$ e quindi esiste una famiglia non numerabile di palle disgiunte; un insieme denso, dovendo intersecare ogni palla, é dunque necessariamente non numerabile.

Problema 2. Da Hanner (scriveremo $\|.\|_p = \|.\|$):

$$\|f_n\| = \|g_n\| = 1, \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\| \to_n 1 \quad \Rightarrow$$

$$2^p \geq \limsup_n [\|f_n + g_n\|^p + \|f_n - g_n\|^p] = 2^p + \limsup_n \|f_n - g_n\|^p \quad \Rightarrow \quad \|f_n - g_n\| \to 0$$

Ora, se

$$\|f_n\|, \|g_n\| \leq 1 \qquad \text{e} \quad \|\frac{f_n + g_n}{2}\| \to 1$$

allora $\|f_n\|, \|g_n\| \to 1$, perché $\|f_n\| + \|g_n\| \le r < 2 \quad \Rightarrow \quad \|\frac{f_n+g_n}{2}\| \le \frac{r}{2} < 1$.
Quindi $\|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\| + \|g_n - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to_n 0$ e quindi $\|\frac{f_n}{\|f_n\|} + \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 2$ e quindi, per quanto appena provato, $\|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 0$ e quindi

$$\|f_n - g_n\| \le \|f_n - \frac{f_n}{\|f_n\|}\| + \|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| + \|g_n - \frac{g_n}{\|g_n\|}\| \to 0$$

Problema 3. Facilmente,

$$\frac{f_n}{\|f_n\|} \rightharpoonup \frac{f}{\|f\|} \quad \text{e} \quad \|\frac{f_n}{\|f_n\|} - \frac{f}{\|f\|}\|_p \to 0 \quad \Rightarrow \quad \|f_n - f\|_p \to 0$$

Possiamo quindi supporre, ($f \neq 0$ e) dividendo per $\|f_n\|$, $\|f_n\| = \|f\| = 1$.

Quindi $\quad f_n \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \frac{f_n + f}{2} \rightharpoonup f \quad \Rightarrow \quad \liminf \|\frac{f_n + f}{2}\| \ge \|f\| = 1$

Dall'uniforme convessitá segue allora che $\|f_n - f\|_p \to 0$.

Esercizio 1 . Sia X insieme non numerabile, dotato della misura che conta . Gli elementi di $L^p(X, \mu)$ dati da $f = \chi_{\{x\}}, x \in X$ hanno la proprietá

$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad \|\chi_{\{x\}} - \chi_{\{y\}}\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$$

Dunque esiste in $L^p(X, \mu)$ un insieme non numerabile di palle disgiunte e quindi ogni insieme denso in $L^p(X, \mu)$, dovendo intersecare ognuna di queste palle, é necessariamente non numerabile.

Esercizio 3 $f_n \to f$ quasi ovunque implica

$$0 = \mu(\{x \in E : \limsup_n |f_n(x) - f(x)| > 0\}) = \mu(\cup_j \cap_n \cup_{k \ge n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\ge \mu(\cap_n \cup_{k \ge n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

e quindi, dato che $\mu(E) < +\infty$, otteniamo

$$\mu(\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\} \le \mu(\cup_{k \ge n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\})$$

$$\to_n \mu(\cap_n \cup_{k \ge n} \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| > \frac{1}{j}\}) = 0$$

Esercizio 4 Sia $g \in L^1 \cap L^q$. Se $f_n \to f$ in misura, allora

$$\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| \le (||f_n||_p + ||f||_p) \limsup_n (\int_{\{x: |f_n(x) - f(x)| \ge \delta\}} |g|^q)^{\frac{1}{q}} + \delta \int |g|$$

$$\leq \delta \int |g| \quad \forall \delta > 0$$

Basta ora osservare che $L^1 \cap L^q$ é denso in L^q. Infatti, se $0 \leq g \in L^q$, é $g = \lim_N \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j}$ con $\sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi anche in L^1. Poi, scrivi $g = g^+ - g^-$.

Se $f_n \to f$ quasi ovunque, e $g = \sum_{j=1}^N \frac{\chi_{E_j}}{j} \in L^q$ e quindi $\mu(E_j) < +\infty \quad \forall j$ e quindi $f_n \to f$ in misura su ogni E_j, come sopra si ha che $\limsup_n |\int (f_n - f)\, g| = 0$.

Esercizio 5

(i) $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to f$ q.o. Passando eventualmente di nuovo ad una sottosuccessione possiamo supporre $f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o. Dunque $f = \overline{f}$ q.o.

(ii) come in (i)

(iii) segue da (i), perché $f_n \to \overline{f}$ in L^p $\Rightarrow$ $f_n \to \overline{f}$ in misura

(iv) segue dal fatto che $f_n \to \overline{f}$ in L^p $\Rightarrow$ $\exists f_{n_k} \to \overline{f}$ q.o.

(v) $\int f_n g \to \int fg, \quad \int f_n g \to \int \overline{f} g \quad \forall g \in L^q \quad \Rightarrow \quad \int (f - \overline{f}) g = 0 \quad \forall g \in L^q \quad \Rightarrow \quad f - \overline{f} = 0$ q.o.

(vi)-(vii) $f_n \to f$ debolmente $\Rightarrow$ f_n limitata, fatto che, insieme a $f_n \to \overline{f}$ in misura oppure q.o. implica $f_n \to \overline{f}$ debolmente, e quindi $f = \overline{f}$ q.o. per (v)

Esercizio 6 $\int_{\{|f(x)| \geq t\}} |f|^p \geq t^p \mu(\{|f(x)| \geq t\})$ e $|f|^p \in L^1 \Rightarrow$

$$\mu(\{|f(x)| \geq t\}) \to_{t \to +\infty} \mu(\{|f(x)| = +\infty\}) = 0 \;\Rightarrow\; \int_{\{|f(x)| \geq t\}} |f|^p \to_{t \to +\infty} 0$$

Esercizio 7 $\mu(X) < +\infty$, $f_n \to f, q.o.$ $\Rightarrow$ $f_n \to f$ in misura $\Rightarrow$ $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} \to_n 0$. Dunque

$$\limsup_n \int |f_n - f|^q \leq \limsup_n \int_{\{x:|f_n(x)-f(x)| \geq \epsilon\}} |f_n - f|^q + \epsilon^q \mu(X) \leq$$

$$\limsup_n \left[\int_{\{x:|f_n(x)-f(x)|\geq\epsilon\}} |f_n - f|^p \right]^{\frac{q}{p}} \mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\})^{\frac{p-q}{p}} + \epsilon^q \mu(X) = +\epsilon^q \mu(X)$$