AM310 2012: Tracce delle lezioni- 8

MISURA PRODOTTO E TEOREMA DI FUBINI

Siano μ, ν misure su X, Y, Σ_μ, Σ_ν le classi dei misurabili. Per ogni $S \subset X \times Y$ é

$$(\mu \times \nu)(S) := \inf\{\sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) : \ S \subset \cup_j R_j, \ R_j := A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu\}$$

$\to!$ $\qquad L^{n+m}(\mathbf{R}^{n+m}) \ = \ L^n(\mathbf{R}^n) \times L^m(\mathbf{R}^m)$

Notazioni. Dato S in $X \times Y$, le **sezioni** di S sono

$$\forall x \in X, \qquad S_x := \{y : (x,y) \in S\}, \qquad \forall y \in Y \qquad S^y := \{x : (x,y) \in S\}$$

É $(\cup_j S_j)_x = \cup_j (S_j)_x$, $\quad (\cap_j S_j)_x = \cap_j (S_j)_x$. Indicato $R = A \times B \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ un **rettangolo misurabile**, valgono le basilari relazioni

$$\nu(R_x) = \nu(B)\chi_A, \qquad \mu(A)\nu(B) \ = \ \int_X \nu(R_x) d\mu$$

R_j sono rettangoli misurabili, chiameremo $P := \cup_j R_j$ **plurirettangolo**.

Proposizione .

(i) $\mu \times \nu$ é misura (esterna) su $X \times Y$

(ii) $(\mu \times \nu)(A \times B) \ = \ \mu(A)\nu(B), \qquad \forall R = A \times B \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu = \int \nu(R_x) d\mu = \int \mu(R^y) d\nu$

(iii) $\Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \ \subset \ \Sigma_{\mu \times \nu}$

(iv) Se $(\mu \times \nu)(T) < \infty$, esistono P_i plurirettangoli di misura finita tali che: $T \subset S := \cap_i P_i$, $\ (\mu \times \nu)(T) \ = \ (\mu \times \nu)(S)$ **(regolaritá della misura prodotto)**.

Prova. (i) Se $T \subset \cup_j T_j$ con $(\mu \times \nu)(T_j) < \infty$, siano $R_{ij} = A_{ij} \times B_{ij}$ rettangoli misurabili tali che $\ T_j \subset \cup_i R_{ij}\ $ e $\ \sum_i \mu(A_{ij})\nu(B_{ij}) \le (\mu \times \nu)(T_j) + \frac{\epsilon}{2^i}$. Sommando, troviamo $\ (\mu \times \nu)(T) \ \le \ \sum_{ij} \mu(A_{ij})\nu(B_{ij}) \ \le \ \sum_j (\mu \times \nu)(T_j) \ + \ \epsilon$, e ció prova la numerabile subadditivitá.

(ii) $R \subset \cup_j R_j$, $R_j \ = \ A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \ \Rightarrow \ \nu(R_x) \ \le \ \sum_j \nu((R_j)_x) \ \Rightarrow \ \mu(A)\nu(B) \ \le \ \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) \ \Rightarrow \ \mu(A)\nu(B) \ \le \ (\mu \times \nu)(R) \ \le \ \mu(A)\nu(B)$.

(iii) Proviamo dapprima che

$$R_1 \cap R_2 = \emptyset \Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1 \cup R_2) \ = \ (\mu \times \nu)(R_1) \ + \ (\mu \times \nu)(R_2).$$

Infatti, se $R_1 \cup R_2 \subset \cup \hat{R}_j, \quad \hat{R}_j = \hat{A}_j \times \hat{B}_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$, allora $\nu((R_1)_x) + \nu((R_2)_x) =$

$$\nu((R_1 \cup R_2)_x) \leq \sum_j \nu((\hat{R}_j)_x) \Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1) + (\mu \times \nu)(R_2) \leq \sum_j \mu(\hat{A}_j)\nu(\hat{B}_j)$$

$$\Rightarrow (\mu \times \nu)(R_1) + (\mu \times \nu)(R_2) \leq (\mu \times \nu)(R_1 \cup R_2)$$

Ora, $\quad (\mu \times \nu)(R) \ = \ (\mu \times \nu)(R \cap Q) \ + \ (\mu \times \nu)(R \setminus Q) \ \ \forall R, Q \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ perché $R \setminus Q$ é unione di (due) rettangoli disgiunti misurabili. Quindi, se $\quad T \subset X \times Y$, $T \subset \cup_j R_j, \ R_j \ = \ A_j \times B_j \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu \quad$ é

$$(\mu \times \nu)(T \setminus R) + (\mu \times \nu)(T \cap R) \ \leq \ (\mu \times \nu)(\cup_j (R_j \setminus R)) \ + \ (\mu \times \nu)(\cup_j (R_j \cap R)) \ \leq$$

$$\sum_j [(\mu \times \nu)(R_j \setminus R) \ + \ (\mu \times \nu)(R_j \cap R)] = \sum_j (\mu \times \nu)(R_j) \ = \ \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j)$$

e quindi, passando all'inf $\quad (\mu \times \nu)(T \setminus R) \ + \ (\mu \times \nu)(T \cap R) \ \leq \ (\mu \times \nu)(T)$.

(iv) Da $(\mu \times \nu)(T) < \infty$ segue che $\quad \forall i, \exists R_{ij} \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu : \ T \subset \cup_j R_{ij} \ \ \forall i$, tali che $(\mu \times \nu)(T) + \frac{1}{i} \geq \sum_j (\mu \times \nu)(R_{ij}) \geq (\mu \times \nu)(\cup_j R_{ij}) \geq (\mu \times \nu)(\cap_i \cup_j R_{ij})$.

Teorema di Fubini I. $\quad$ Sia $S \in \Sigma_{\mu \times \nu}, \ S \subset \cup_j S_j, \ (\mu \times \nu)(S_j) < \infty \ \forall j$. Allora

(i) $S_x \in \Sigma_\nu \quad \mu - q.o. \ x, \qquad S^y \in \Sigma_\mu \quad \nu - q.o. \ y$

(ii) $x \to \nu(S_x), \qquad y \to \mu(S^y) \quad$ sono misurabili

(iii) $\qquad (\mu \times \nu)(S) \quad = \quad \int\limits_X \nu(S_x) \, d\mu \quad = \quad \int\limits_Y \mu(S^y) \, d\nu$

Dimostrazione. Intanto la tesi é vera se S é un **plurirettangolo** $P = \cup_j R_j$ e $R_j = A_j \times B_j$ sono rettangoli disgiunti: $\quad P_x = \cup_j (R_j)_x \quad$ é, per ogni x, misurabile perché unione numerabile di misurabili e $\quad \nu(P_x) = \sum_j \nu((R_j)_x) = \sum_j \nu(B_j)\chi_{A_j} \quad$ é misurabile perché somma di una serie di funzioni misurabili; infine, vale (iii):

$$(\mu \times \nu)(P) = \sum_j (\mu \times \nu)(R_j) = \int \sum_j [\nu((R_j)_x)] \, d\mu = \int \nu(\cup_j (R_j)_x) d\mu = \int \nu(P_x) d\mu$$

Ora, ogni plurirettangolo $P = \cup_i R_i, \ R_i = A_i \times B_i \in \Sigma_\mu \times \Sigma_\nu$ si puó scrivere come unione di rettangoli disgiunti (se $\hat{R}_1 = R_1, \hat{R}_{n+1} = R_{n+1} \setminus \cup_{i=1}^n R_i$ é $\cup_j R_j = \cup_j \hat{R}_j$ e $\hat{R}_i$ si puó a sua volta scrivere come unione disgiunta di rettangoli misurabili!). Quindi $\nu(P_x)$ é misurabile e (i)-(iii) valgono **per ogni plurirettangolo** P.

Proviamo ora (i)-(iii) per $S = \cap_j P_j$ con $(\mu \times \nu)(P_1) < \infty$.

Intanto, le sezioni sono ovviamente misurabili. Poi, possiamo intanto supporre che $P_{j+1} \subset P_j \quad \forall j$. Infatti, se $P = \cup_j R_j,\ \hat{P} = \cup_j \hat{R}_j$ allora $P \cap \hat{P} = \cup_{ij} R_i \cap \hat{R}_j$ é plurirettangolo, e quindi, basta eventualmente sostituire P_n con $\cap_{j=1}^n P_j$. Quindi, da $(\mu \times \nu)(P_1) < \infty$ segue $(\mu \times \nu)(S) = \lim_j (\mu \times \nu)(P_j) = \lim_j \int_X \nu((P_j)_x) d\mu$. Siccome $\int_X \nu((P_1)_x) d\mu = (\mu \times \nu)(P_1) < \infty$, é $\nu((P_1)_x) < \infty \quad q.o.\ x$, e quindi $\nu((P_j)_x) \to \nu((\cap_j (P_j)_x) = \nu(S_x)$ per quasi ogni x e quindi $x \to \nu(S_x)$ é misurabile. Infine, $\lim_j \int_X \nu((P_j)_x) d\mu = \int_X \lim_j \nu((P_j)_x) d\mu$ (convergenza dominata!)

Conclusione della dimostrazione. Se $(\mu \times \nu)(S) < \infty$, esiste $\hat{S} = \cap_j P_j$ con $(\mu \times \nu)(P_j) < \infty$ e tale che $\quad S \subset \hat{S} \quad$ e $\quad (\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(\hat{S})$. Per quanto visto, per $\hat{S}$ valgono (i)-(iii). Allora

- $(\mu \times \nu)(S) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = (\mu \times \nu)(\hat{S}) = \int \nu(\hat{S}_x)\, d\mu \quad \Rightarrow \quad 0 = \nu(\hat{S}_x) \geq \nu(S_x) \quad q.o.\, x \ \Rightarrow\ x \to \nu(S_x)$ é misurabile e $(\mu \times \nu)(S) = 0 = \int \nu(S_x)\, d\mu$
- $(\mu \times \nu)(S) < \infty \quad \Rightarrow \quad (\mu \times \nu)(\hat{S} \setminus S) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nu((\hat{S} \setminus S)_x) = 0$ per quasi ogni $x \quad \Rightarrow \quad S_x = \hat{S}_x \setminus (\hat{S} \setminus S)_x \in \Sigma_\nu \quad q.o.\, x$ e $\nu(S_x) = \nu(\hat{S}_x)\ q.o.\, x$ é misurabile e $(\mu \times \nu)(S) = (\mu \times \nu)(\hat{S}) = \int \nu(\hat{S}_x)\, d\mu = \int \nu(S_x)\, d\mu$.

Supponiamo infine che S sia soltanto $\sigma-$finito.
Sostituendo S_n con $\cup_{j=1}^n S_j$ possiamo supporre $S_n \subset S_{n+1}$ e sostituendo S_n con $S_n \cap S$ possiamo supporre che $S = \cup_n S_n$. Ora, $(\mu \times \nu)(S_j) < \infty \Rightarrow S_x = \cup (S_j)_x \in \Sigma_\nu \quad q.o.\ x, \quad \nu(S_x) = \lim_j \nu((S_j)_x)$ é misurabile e $\int \nu(S_x) = \lim_j \int \nu((S_j)_x)\, d\mu = \lim_j (\mu \times \nu)(S_j) = (\mu \times \nu)(S)$.

NOTA. L'ipotesi di $(\mu \times \nu)\ \sigma-$ finitezza su S é essenziale (vedi Esercizio 1).

Teorema di Fubini II. Sia $\int_{X \times Y} |f|\, d(\mu \times \nu) < \infty$. Allora

(i) $x \to f(x,y), \quad y \to f(x,y)$ sono sommabili per quasi ogni x, (risp. per quasi ogni y)

(ii) $y \to \int_X f(x,y)\, d\mu, \quad x \to \int_Y f(x,y)\, d\nu$ sono sommabili e

$$\int_Y \Big(\int_X f(x,y)\, d\mu\Big)\, d\nu = \int_X \Big(\int_Y f(x,y)\, d\nu\Big)\, d\mu = \int_{X \times Y} f\, d(\mu \times \nu)$$

Dimostrazione. Sia $S \in \Sigma_{\mu\times\nu}$, $(\mu\times\nu)(S) < \infty$. Da $\chi_S\,(x,y) = \chi_{S_x}\,(y)$ e dal Teorema di Fubini I segue

$$\int_{X\times Y} \chi_S \, d(\mu\times\nu) = (\mu\times\nu)(S) = \int\limits_X \nu(S_x)\, d\mu = \int\limits_X \left[\int\limits_Y \chi_{S_x}(y)\ d\nu\right] d\mu$$

Sia quindi $0 \leq f = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}$, $S_j \in \Sigma_{\mu\times\nu}$. Allora

$$\infty > \int_{X\times Y} f = \sum_j \frac{1}{j}(\mu\times\nu)(S_j) \quad\Rightarrow\quad (\mu\times\nu)(S_j) < \infty \ \ \forall j \quad\Rightarrow$$

$(S_j)_x \in \Sigma_\nu\ \forall j$, $\mu - q.o.\ x$, $x \to \nu((S_j)_x)$ sono misurabili e quindi

$$\int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu) = \sum_j \frac{1}{j}\int_{X\times Y} \chi_{S_j}\, d(\mu\times\nu) = \sum_j \frac{1}{j}\int\limits_X \left[\int\limits_Y \chi_{(S_j)_x}(y)\ d\nu\right] d\mu =$$

$$= \int\limits_X \left[\int\limits_Y \sum_j \frac{1}{j}\ \chi_{(S_j)}(x,y)\ d\nu\right] d\mu = \int_X (\int_Y f(x,y) d\nu) d\mu$$

Analogamente,

$$\int_Y (\int_X \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}(x,y)\, d\mu)\, d\nu = \int_{X\times Y} f\, d(\mu\times\nu)$$

Per concludere:

$$\int f d(\mu\times\nu) = \int f^+ - f^- := \int_X (\int_Y f^+ d\nu) d\mu - \int_X (\int_Y f^- d\nu) d\mu = \int_X (\int_Y f d\nu) d\mu$$

NOTA. Lṕotesi $\int_{X\times Y} |f| < \infty$ é essenziale (vedi Esercizio 1).

Teorema di Fubini-Tonelli. Sia $\mu\times\nu$ σ finita, f $\mu\times\nu$ misurabile. Allora

$$\int_X (\int_Y |f|\, d\nu)\, d\mu < \infty \ \Rightarrow\ \int_{X\times Y} |f|\, d(\mu\times\nu) < \infty$$

e quindi valgono le conclusioni del Teorema di Fubibi II.

Basta osservare che l'ipotesi di σ finitezza assicura che, se $|f| = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{S_j}$, agli S_j é applicabile il Teorema di Fubini I. La dimostrazione continua come per Fubini II.

NOTA L'ipotesi di σ finitezza é essenziale (vedi Esercizio 1).

INTEGRAZIONE IN $\mathbf{R}^N$

Nel seguito, con L^N indicheremo di regola la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$.

Ricordiamo che **la misura di Lebesgue in $\mathbf{R}^N$** ha le seguenti fondamentali proprietá (che in effetti la caratterizzano):

é misura boreliana regolare, invariante per traslazione
é finita sui compatti e positiva sugli aperti

Siccome $L^N(R) = vol(R)$ per ogni rettangolo R,

é invariante per riflessione e positivamente omogenea di grado N

Inoltre valgono le proprietá di approssimazione

$L^N(A) = \inf\{L^N(O) : \quad A \subset O, O \text{ aperto}\} \ \forall A \subset \mathbf{R}^N$

$L^N(E) = \sup\{L^N(K) : \quad K \subset E, K \text{ compatto}\} \ \forall E \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile

Dall'invarianza per traslazione segue l'

invarianza per traslazione dell'integrale

se $\tau_h f(x) := f(x-h), \quad x, h \in \mathbf{R}^N,$ allora

$$\tau_h f \text{ é misurabile} \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ é misurabile} \quad \text{e} \quad \int_{\mathbf{R}^N} (\tau_h f) dL^N = \int_{\mathbf{R}^N} f dL^N$$

Dalla N-omogeneitá e dall'invarianza per riflessione seguono le regole di trasformazione

$$\int_{\mathbf{R}^N} f(tx) dL^N = t^{-N} \int_{\mathbf{R}^N} f(x) dL^N \quad \forall t > 0, \qquad \int_{\mathbf{R}^N} f(-x) dL^N = \int_{\mathbf{R}^N} f(x) dL^N$$

Le regole di trasformazione sopra indicate non sono che casi particolari della generale formula di cambio di variabile, ben nota nell'integrale di Riemann che coincide infatti , sulle funzioni continue a supporto compatto, con l'integrale di Lebesgue.

TEOREMI DI DENSITÁ
(approsimazione in media).

Approssimazione mediante funzioni semplici. Sia μ misura su $X, p \geq 1$. Allora

per ogni $f \in L^p$ esistono funzioni semplici φ_j tali che $\int |f - \varphi_j|^p \to_j 0$.

Infatti, se $0 \leq f = \lim_j \varphi_j$, $\varphi_j \leq f$ funzioni semplici, é $0 \leq \int (f - \varphi_j)^p \to_j 0$ (convergenza dominata). Basta poi scrivere $f = f^+ - f^-$.

Approssimazione di funzioni sommabili in $\mathbf{R}^n$ mediante funzioni $C_0(\mathbf{R}^N)$.

Approssimazione di funzioni caratteristiche. Sia $E \subset \mathbf{R}^N$ Lebesgue misurabile, $p \geq 1$. Se $L^n(E) < \infty$, allora

$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \varphi_\epsilon \in C_0(\mathbf{R}^N) : \quad \int_{\mathbf{R}^N} |\varphi_\epsilon - \chi_E|^p \leq \epsilon.$

Basta ricordare che esistono K_ϵ compatto, O_ϵ aperto, tali che $K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon$ e $L^N(O_\epsilon \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon$.
Sia $\delta > 0$ tale che $d(x, K_\epsilon) \leq \delta \Rightarrow x \in O_\epsilon$. Basta allora porre $\varphi_\epsilon(x) := \gamma(d(x, K_\epsilon))$ ove $\gamma \in C(\mathbf{R})$ con $\gamma(0) = 1$ e $\gamma(t) = 0$ se $t \geq \delta$.

3. Corollario . Se $\int_{\mathbf{R}^N} |f|^p < \infty$, esistono $f_j \in C_0$ tali che $\int_{\mathbf{R}^N} |f - f_j|^p \to_j 0$.

Segue subito da 1 e 2.

4. Corollario . $\int_{\mathbf{R}^N} |f| < \infty \Rightarrow \int_{\mathbf{R}^N} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \to_{|h| \to 0} 0$.

Ovvio se $f \in C_0$ (convergenza dominata). Poi,

$$f_j \in C_0(\mathbf{R}^N), \qquad \int |f - f_j|^p \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\overline{\lim}_{|h| \to 0} (\int |f(x+h) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq \overline{\lim}_{|h| \to 0} [(\int |f(x+h) - f_j(x+h)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_j(x+h) - f_j(x)|^p)^{\frac{1}{p}} + (\int |f_j(x) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq 2(\int |f_j(x) - f(x)|^p)^{\frac{1}{p}}$$

PRODOTTO DI CONVOLUZIONE.

Siano $f, g \in C_0(\mathbf{R}^N)$. É allora definita

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbf{R}^N} f(x-y)\ g(y)\,dy, \quad x \in \mathbf{R}^N$$

$f * g$ si chiama prodotto di convoluzione di f e g. Valgono le seguenti proprietá:

(i) $f * g \; = \; g * f$

(ii) $f * g \in C_0(\mathbf{R}^N)$ con $\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$

(iii) $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |f * g| \leq \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f| \int\limits_{\mathbf{R}^N} |g|$

La (i) si ottiene effettuando il cambio di variabile $z = x - y$.

La (ii) segue da: $x \notin \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$, $y \in \operatorname{supp} g \Rightarrow x - y \notin \operatorname{supp} f$; la continuitá di $f * g$ segue dai teroremi di passaggio al limite sotto segno di integrale.

La (iii) segue da Fubini-Tonelli : $\int\limits_{\mathbf{R}^N} |(f * g)(x)| dx \leq$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^N} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)| dy \right) dx = \int\limits_{\mathbf{R}^N} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|\,|g(y)| dx \right) dy = \int\limits_{\mathbf{R}^N} |f| \int\limits_{\mathbf{R}^N} |g|$$

Il prodotto di convoluzione si estende a funzioni $f, g \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Osserviamo in primo luogo che $f(x-y)$ é misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$. Infatti, se $f_j \in C_0(\mathbf{R}^n)$ sono tali che $f_j \to f$ in $L^1(\mathbf{R}^n)$ e $f_j(x) \to f(x) \quad \forall x \notin N$ ove N é un insieme di misura nulla, allora $f_j(x-y) \to f(x-y) \quad \forall (x,y) \notin p^{-1}(N)$ ove $p(x,y) := x - y$ e $p^{-1}(N)$ é di misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ perché, se $N \subset B$ con B boreliano in $\mathbf{R}^N$ di misura nulla, allora $p^{-1}(B)$ é boreliano in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$ ed ha, per Fubini, misura nulla, perché $[p^{-1}(B)]_y = y + B$. Anche in questo caso piú generale si ottengono, come sopra, le proprietá (i) e (iii). Piú in generale, se $p \geq 1$, si ha

$$f \in L^1, \quad g \in L^p \quad \Rightarrow \quad \|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$$

Infatti, se $p > 1$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, si ha: $\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y) g(y)| dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} =$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} |g(y)| dy\right)^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\left[\int_{\mathbf{R}^N} \left(\int_{\mathbf{R}^N} |f(x-y)||g(y)|^p dy\right) \left(\int_{\mathbf{R}^n} |f(x-y)| dy\right)^{\frac{p}{q}} dx\right]^{\frac{1}{p}} = \|f\|_1^{\frac{1}{p}} \|g\|_p \|f\|_1^{\frac{1}{q}}$$

AM5 2010: Esercizi e problemi-8

MISURA PRODOTTO E TEOREMA DI FUBINI

Esercizio 1. Siano $X = Y = [0, 1]$

Siano μ la misura di Lebesgue e ν la misura che conta. Sia $D = \{(x, x) : x \in [0, 1]\}$.

Provare che D é $\mu \times \nu$-misurabile e calcolare $(\mu \times \nu)(D)$.

Provare che $\nu(D_x)$ é μ-misurabile, che $\mu(D^y)$ é ν-misurabile.

É $\int_X \nu(D_x) d\mu = \int_Y \mu(D^y) d\nu$?

Esercizio 2. Siano $X = Y = [0, 1]$ muniti della misura di Lebesgue . Siano

$$I_0 = [0, \frac{1}{2}], I_1 = [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}], \ldots I_n = [\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n}, \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}], \quad n \in \mathbf{N}$$

$$R_j = I_{j-1} \times I_{j-1}, \qquad \hat{R}_j = I_j \times I_{j-1}, \qquad j \in \mathbf{N}$$

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1} \chi_{R_n} - 2^{2n} \chi_{\hat{R}_n}$$

Mostrare che $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dx) dy$, $\int_0^1 (\int_0^1 f(x, y) dy) dx$ esistono entrambi ma sono diversi.

Perché non si applica in questo caso il Teorema Fubini-Tonelli?

Esercizio 3 Provare che $L^{n+m} = L^n \times L^m$

INTEGRAZIONE IN $\mathbf{R}^N$, CONVOLUZIONE

Problema 1. Sia μ, misura in $\mathbf{R}^n$ definita sulla classe dei Boreliani; μ si dice Borel regolare se per ogni Boreliano B risulta

(i) $\mu(B) = \inf\{\mu(O) : B \subset O, O \text{ aperto}\}$

(ii) $\mu(B) = \sup\{\mu(K) : K \subset B, K \text{ compatto}\}$

Provare che, se μ é Borel regolare, finita sui compatti e positiva sugli aperti, ed é invariante per traslazione, allora é un multiplo della misura di Lebesgue.

Problema 2 . Data f Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^n$, $t > 0$, sia $f_t(x) = f(tx)$. Provare che

(i)f_t è misurabile, $f \in L^p \Rightarrow f_t \in L^p$ e $||f_t||_p = t^{-\frac{n}{p}}||f||_p$

Problema 3. Siano f, g sommabili in $\mathbf{R}^n$. Stabilire se é vero che

f, g pari/dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é pari, f pari, g dispari $\Rightarrow$ $f * g$ é dispari

Problema 4. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Provare che

(i) $B \subset \mathbf{R}^N$ boreliano di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in B\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Usare Fubini..

(ii) $A \subset \mathbf{R}^N$ di misura nulla $\Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in A\}$ ha misura nulla in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

(iv) A Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \Rightarrow \{(x, y) : \ x - y \in A\}$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Considerare B boreliano in $\mathbf{R}^N$ tale che $A \subset B, L^N(A) = L^N(B)$..

Problema 5 Sia $f : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ Lebesgue misurabile. Provare che $(x,y) :\to f(x-y)$ é Lebesgue misurabile in $\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^N$

Suggerimento. Scrivere, per $f \geq 0$, $f(x) = \sum_j \frac{1}{j}\chi_{A_j}, f(x-y) = ...$ *ed usare l'esercizio precedente (nota che* $\chi_A(x-y) = \chi_{\{(x,y):\ x-y\in A\}}$*).*

Problema 6. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$. Provare che

$$f * \varphi = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty \Rightarrow f = 0\, q.o.$$

Problema 7. Provare che

$$f \in L^1(\mathbf{R}^N), \quad |g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad g * f \quad \text{é ben definita e continua}$$

Mostrare, utilizzando le funzioni $f = g = x^{-\frac{2}{3}}\chi_{[0,1]}$, che l'ipotesi di limitatezza su g é essenziale.

Problema 8. Provare che

$$f, g \in L^1(\mathbf{R}^N), \quad |g(x)| \leq c \quad \Rightarrow \quad (g * f)(x) \to_{|x|\to+\infty} 0$$

Mostrare che l'ipotesi di limitatezza su g é essenziale.

Esercizio 1. Siano $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}\chi_{[-1,1]}$, $g(x) = \sum_n n^\alpha \chi_{[n, n+\frac{1}{n^\beta}]}$. Stabilire se , per $\beta > \alpha + 1$, $f * g$ é limitata

Esercizio 2. Sia f sommabile in $\mathbf{R}^n$, $r > 0$. Provare che

$$x \to \int_{B_r(x)} f(y)dy$$

é continua e dotata di massimo su tutto $\mathbf{R}^N$. Provare infine che

$$r \to \max_{\mathbf{R}^N} \int_{B_r(x)} f(y)dy$$

é continua.

Esercizio 3. Sia $f(x) = \sqrt{\frac{1}{|x|(1+\log^2|x|)}}, x \in \mathbf{R}$. Provare che

(i) $f \in L^p$ se e solo se $p = 2$

(ii) $f \star \chi_{[-1,1]} \in L^p$ se e solo se $p \geq 2$.

AM5: Esercizi e problemi- 8

CENNI DI SOLUZIONE

Esercizio 1. $D = \cap_n \cup_{i=1}^n [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}] \times [\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]$. Dunque D é misurabile nel prodotto.

Poi, $\nu(D_x) \equiv 1, \quad \mu(D^y) \equiv 0, \quad \int_X \nu(D_x) d\mu = 1 \neq 0 = \int_Y \mu(D^y) d\nu$.

Esercizio 2. $y \in I_{n-1} \quad \Rightarrow$

$$\int_0^1 f(x,y)dx = \frac{2^{2n-1}}{2^n} - \frac{2^{2n}}{2^{n+1}} = 0 \quad \Rightarrow \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dx)dy = 0$$

mentre $$0 \le x \le \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy \equiv 1$$

$$\frac{1}{2} < x \le 1 \quad \Rightarrow \int_0^1 f(x,y)dy \equiv -2^n + 2^n = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_0^1 (\int_0^1 f(x,y)dy)dx = \frac{1}{2}$$

Esercizio 3 Basta considerare il caso $n = m = 1$.

Basta provare che $L^2 \le L^1 \times L^1$. Sia $A \subset \mathbf{R}^2$ tale che $(L^1 \times L^1)(A) < +\infty$ e sia quindi $A \subset \cup_j A_j \times B_j \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ Lebesgue misurabili tali che $\sum_j L^1(A_j) L^1(B_j) < +\infty$. Siano quindi $A_j \subset \cup_i I_{ij}, \;\; B_j \subset \cup_k J_{kj}$ con

$$\sum_i l(I_{ij}) \le L^1(A_j) + \epsilon a_j, \;\; \sum_k l(J_{kj}) \le L^1(B_j) + \epsilon b_j$$

per cui $A \subset \cup_{ikj} I_{ij} \times J_{kj}$ e quindi

$$L^2(A) \le \sum_{ikj} l(I_{ij}) \;\; l(J_{kj}) \le \sum_j (L^1(A_j) + \epsilon a_j) \;\; (L^1(B_j) + \epsilon b_j) =$$

$$= \sum_j [L^1(A_j) \;\; (L^1(B_j)] + \epsilon \sum_j [L^1(A_j) b_j + L^1(B_j) a_j] + \epsilon^2 \sum_j a_j b_j$$

Prendendo $a_j = L^1(A_j), \;\; b_j = L^1(B_j)$ troviamo

$$L^2(A) \le (1+\epsilon)^2 \sum_j [L^1(A_j) \;\; (L^1(B_j)]$$

e quindi $L^2(A) \le (1+\epsilon)^2 (L^1 \times L^1)(A)$.

INTEGRAZIONE IN $\mathbf{R}^N$,   CONVOLUZIONE

Problema 1 . Sia $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ tale che $\int h dL^N = 1$.

Per ogni $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ risulta, usando Fubini applicato alla misura prodotto $\nu \times L^N$ e l'invarianza per traslazione:

$$\int f d\mu =$$

$$\int (\int f(y) d\mu) h(x) dL^N = \int (\int f(x+y) d\mu) h(x) dL^N = \int (\int f(x+y) h(x) dL^N) d\mu =$$

$$= \int (\int f(x) h(x-y) dL^N) d\mu = \int (\int h(x-y) d\mu) f(x) dL^N =$$

$$= c \int f dL^N$$

ove $c := \int h d\mu$.   Dalle proprietá (i)-(ii) segue, come nel caso della misura di Lebesgue, che $C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ é denso in $L^1(\mu)$, e quindi

$$\int_E d\mu = c \int_E dL^N \quad \forall E \quad \text{boreliano}$$

Problema 3.   Se f, g sono entrambe pari o entrambe dispari, risulta

$$(f*g)(-x) = \int f(-x-y) g(y) dy = \int f(x+y) g(-y) dy = \int f(x-z) g(z) dz = (f*g)(x)$$

Allo stesso modo si vede che, se f, g sono l'una pari e l'altra dispari, allora $f * g$ é dispari.

Problema 4.   Sia $B \subset \mathbf{R}^N$ boreliano, $p : (x, y) \to x - y$.   Siccome p é continua, $p^{-1}(B)$ é boreliano:

$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbf{R}^N : p^{-1}(A)$ é boreliano $\}$ contiene i boreliani, perché (come si vede subito) $\mathcal{A}$ é σ - algebra e contiene i chiusi (p é continua!).

(i) Si puó quindi applicare Fubini all'insieme misurabile $p^{-1}(B)$:

$$[p^{-1}(B))]_x = x - B \quad \Rightarrow \quad L^N([p^{-1}(B))]_x) = 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$(L^N \times L^N)(p^{-1}(B)) = \int L^N(x - B) dL^N(x) = 0$$

(ii) Se $A \subset B, L^N(B) = 0, B$ boreliano, da $p^{-1}(A) \subset p^{-1}(B)$ ed (i) segue che $p^{-1}(A)$ ha misura nulla

(iii) Sia A di misura finita, $A \subset B$ boreliano con $L^N(A) = L^N(B)$ e quindi $B \setminus A$ ha misura nulla. Da

$$p^{-1}(A) = p^{-1}(B \setminus (B \setminus A)) = p^{-1}(B) \setminus p^{-1}(B \setminus A)$$

segue che $p^{-1}(A)$ é misurabile, perché, per (ii), $p^{-1}(B \setminus A)$ ha misura nulla e $p^{-1}(B)$ é (addirittura) boreliano.

Problema 6. In particolare,

$$\int f(y)g(-y)dy = 0 \quad \forall g \in C_0^\infty$$

Ora, se E é misurabile di misura finita, per ogni $\epsilon > 0$ esistono $K_\epsilon \subset E \subset O_\epsilon$ (rispettivamente compatto ed aperto) con $L^N(O_\epsilon) - \epsilon \leq L^N(E) \leq L^N(K_\epsilon) + \epsilon$. Quindi

$$\exists \quad \varphi_n \in C_0^\infty, \quad 0 \leq \varphi_n \leq 1 : \quad \varphi_n \to_n \chi_E \quad q.o. \quad \text{e quindi} \quad \|\varphi_n - \chi_E\|_{L^1} \to_n 0$$

e quindi $\displaystyle\int f\chi_E = 0 \quad \forall E$ misurabile. Concludiamo che $f = 0$

Problema 7. $\int |f(x-y)g(y)|dy \leq c \int |f| \quad \forall x$ e quindi $f * g$ é definita $\forall x$ e

$$|(f*g)(x+h) - (f*g)(x)| \leq c \int |f(x+h-y) - f(x-y)|dy = \int |f(z+h) - f(z)|dz \to_{|h|\to 0} 0$$

Infine, siano $\quad f = g = x^{-\frac{2}{3}} \chi_{[0,1]} \in L^1(\mathbf{R})$

É $\quad f * g \in L^1, (f * g)(x) = 0$ se $x \leq 0$ oppure $x \geq 2$ mentre $0 < x < 1 \Rightarrow$

$$(f * g)(x) = \int_0^1 \frac{1}{(x-y)^{\frac{2}{3}}} \chi_{[0,1]}(x-y) \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} dy = \int_0^x \frac{1}{(x-y)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} dy >$$

$$\int_0^x \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}} dy = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} y^{\frac{1}{3}} |_0^x = \frac{1}{3} \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \to_{x \to 0^+} +\infty$$

Problema 8. Fissati $k > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, e posto $A(k) := \{z : \ |f(z)| \geq k\}$, $A(k,x) := \{y : \ |f(x-y)| \geq k\} = x - A(k)$, risulta, per ogni $R > 0$

$$\int |f(x-y)g(y)|dy \leq \|g\|_\infty \int\limits_{|y|\leq R} |f(x-y)|dy + \|g\|_\infty \int\limits_{A(k,x)} |f(x-y)|dy + k \int\limits_{|y|\geq R} |g(y)|dy$$

Siccome $\int |f(y)|dy \geq \int\limits_{A(k)} |f(z)|dz \geq kL^N(A(k)) \Rightarrow L^N(A(k)) \to_{k\to+\infty} 0$, si ha

$$(\star) \qquad \int\limits_{A(k,x)} |f(x-y)|dy = \int\limits_{A(k)} |f(z)|dz \to_{k\to+\infty} 0$$

Dunque,

$$\forall \epsilon > 0, \ \exists k_\epsilon, \ R_\epsilon : \ \|g\|_\infty \int\limits_{A(k_\epsilon,x)} |f(x-y)|dy \leq \epsilon, \qquad k_\epsilon \int_{|y|\geq R_\epsilon} |g| \leq \epsilon$$

e quindi

$$\limsup_{|x|\to+\infty} \int |f(x-y)\, g(y)|dy \leq \|g\|_\infty \limsup_{|x|\to+\infty} \int\limits_{|y|\leq R_\epsilon} |f(x-y)|dy \ + \ 2\epsilon$$

$$= \|g\|_\infty \limsup_{|x|\to+\infty} \int\limits_{B_{R_\epsilon}(x)} |f(z)|dz \ + \ 2\epsilon = 2\epsilon$$

Controesempio: lo stesso del Problema 8.

Esercizio 1 . É $\int g = \sum_n \frac{n^\alpha}{n^\beta} < +\infty$ se $\beta - \alpha > 1$. Poi,

$$(f * g)(x) = \sum_n n^\alpha \int_{x-n-\frac{1}{n^\beta}}^{x-n} f(t)dt \quad \text{e} \quad 2\alpha > \beta > \alpha + 1 \quad \Rightarrow$$

$$(f * g)(k + \frac{1}{k^\beta}) = k^\alpha \int_0^{\frac{1}{k^\beta}} f(t)dt = \frac{1}{2} k^\alpha \sqrt{t}|_0^{\frac{1}{k^\beta}} = \frac{1}{2} k^{\alpha - \frac{\beta}{2}} \to_n +\infty$$

Esercizio 2. Se $\int_{B_r(x)} f(y)dy = 0 \quad \forall x$ allora il massimo é zero ed é realizzato in ogni punto. Se no, $\sup_x \int_{B_r(x)} f(y)dy > 0$. Ma

$$I(x) := \int_{B_r(x)} f(y)dy = \int f(y)\, \chi_{B_r(x)}(y)dy = \int f(y)\chi_{B_r}(x-y)dy = (f * \chi_{B_r})(x)$$

é continua in x (Problema 8) e va a zero all'infinito (Problema 9). Per il teorema di Weierstrass, I é dotata di massimo, diciamo

$$\sup_x \int_{B_r(x)} f(y)dy = \int_{B_r(x_r)} f(y)dy$$

Poi, per l'assoluta continuitá dell'integrale

$$\forall \epsilon,\ \exists \delta_\epsilon : \quad |r-\rho| \leq \delta_\epsilon \quad \Rightarrow \quad |\int_{B_r(x)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x)} f(y)dy| \leq \epsilon \quad \forall x \quad \Rightarrow$$

$$|\int_{B_r(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_\rho)} f(y)dy| \leq$$

$$|\int_{B_r(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_r)} f(y)dy| + |\int_{B_\rho(x_r)} f(y)dy - \int_{B_\rho(x_\rho)} f(y)dy| \leq 2\epsilon$$

Esercizio 3.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{|x|^{\frac{p}{2}}(1+\log^2|x|)^{\frac{p}{2}}} = +\infty$$

se $p \neq 2$, perché se $p < 2$ f^p va a zero per x che va all'infinito, piú lentamente di $\frac{1}{|x|}$ mentre se $p > 2$ va all'infinito, per x che va a zero, piú rapidamente di $\frac{1}{|x|}$.

Infine,

$$f^2 \leq \frac{1}{|x| \log^2 |x|}$$

che é integrabile in zero e all'infinito perché $\frac{d}{dx}\frac{1}{\log x} = -\frac{1}{x\log^2 x}$.

Poi $$(f \star \chi_{[-1,1]})(x) = \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{|t|\,(1+\log^2|t|)}}$$

é una funzione continua, di potenza p-esima sommabile sse $p \geq 2$ perché

$$\frac{2}{\sqrt{(x+1)\,(1+\log^2(x+1))}} \leq \int_{x-1}^{x+1} \frac{dt}{\sqrt{|t|\,(1+\log^2|t|)}} \leq \frac{2}{\sqrt{(x-1)\,(1+\log^2(x-1))}}$$