**AM310 2012- Sett. 12.**

# IL LEMMA DI RICOPRIMENTO DI VITALI

# ed

# IL TEOREMA DI LEBESGUE-BESICOVITCH

Se $f \in C(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ il Teorema della media dice che, $\forall x \in \mathbf{R}^n, \forall r > 0$, $\exists \xi(r) \in B_r(x)$:

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \;=\; |f(\xi(r)) - f(x)| \to_{r\to 0} \; 0$$

In particolare, se $n = 1$, si ottiene il Teorema Fondamentale del Calcolo

$$\left| \frac{\int\limits_a^{x+r} f(t)\, dt \;-\; \int\limits_a^{x} f(t)\, dt}{r} \;-\; f(x) \right| \;=\; \left| \frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(t)\, dt \;-\; \frac{1}{r} \int\limits_x^{x+r} f(x)\, dt \right| \le$$

$$\le \frac{2}{2|r|} \int_{x-|r|}^{x+|r|} |f(t) - f(x)|\, dt \to_{r\to 0}$$

Nel caso $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$, se $\varphi := \frac{1}{volB_1}\chi_{B_1}$, e $\quad \varphi_r = \frac{1}{r^N}\varphi(\frac{x}{r})$, allora

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} g(y)\, dy \;=\; (g * \varphi_r)(x)$$

e quindi $\quad \frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} g(y)\, dy \to g \qquad$ in $L^1$, e quindi

$$\exists r_k \to 0 : \qquad \frac{1}{vol(B_{r_k}(x))} \int\limits_{B_{r_k}(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \;\to_k 0$$

In effetti si ha di piú:

## Il Teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch

Sia $\quad f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N). \quad$ Allora

$$\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \;\to_{r\to 0} 0 \qquad q.o.\ x$$

In particolare, $\frac{1}{vol(B_r)} \int\limits_{B_r(x)} f(y)\,dy \;\to_{r\to 0} f(x) \qquad q.o.\ x$

La dimostrazione si basa sul seguente

**Lemma 1**. Sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$, $f \geq 0$ e $f^\sharp(x) := \limsup\limits_{r\to 0} \frac{1}{vol B_r(x)} \int\limits_{B_r(x)} f(y)\,dy$. Se $c > 0$ e $A \subset \{f^\sharp \geq c\}$, allora

$$\int_\Omega f(y)\,dy \;\geq\; c\,L^N(A) \qquad \forall\,\Omega \text{ aperto contenente } A$$

che a sua volta segue dal Lemma di di Vitali, la cui dimostrazione é in Appendice:

**Ricoprimento di Vitali**. Sia $A \subset \mathbf{R}^N$. Sia $\mathcal{V}$ famiglia di **palle chiuse**. $\mathcal{V}$ si dice ricoprimento fino ( o di Vitali di ) $A$ se

$$\forall x \in A, \quad \exists B_r(x) \in \mathcal{V} \qquad \text{e} \qquad \inf\{r > 0 : B_r(x) \in \mathcal{V}\} = 0$$

ESEMPIO. Sia $A$ aperto. Fissato $r > 0$, l'insieme delle palle chiuse contenute in $A$ e di raggio minore di $r$ é ricoprimento di Vitali di $A$.

**Lemma di Vitali**. Sia $A \subset \Omega \subset \mathbf{R}^N$, $\Omega$ aperto di misura finita. Sia $\mathcal{V}$ ricoprimento di Vitali di $A$, $\mathcal{V}_\Omega := \{B \in \mathcal{V} : \; B \subset \Omega\}$ . Allora

$$\exists B_j \in \mathcal{V}_\Omega : \quad B_i \cap B_j \;=\; \emptyset \;\; \forall i \neq j \qquad \text{e} \qquad L^N(A \setminus \cup_j B_j) \;=\; 0$$

ESEMPIO. Sia $\Omega$ aperto, $\delta > 0$. Allora esiste una famiglia numerabile di palle chiuse $B_j \subset \Omega$ disgiunte di raggio minore di $\delta$ e tali che $L^N(\Omega \setminus \cup_j B_j) = 0$

NOTA. Il Lemma vale (vedi Appendice) anche con $\mu \prec\prec L^N$ al posto di $L^N$. In effetti si puó provare che vale per qualsiasi misura di Borel regolare.

**Prova del Lemma 1.** Sia $A \subset \{x : \; f^\sharp(x) \geq c\}$, di misura finita. Fissato $0 < \epsilon < c$,

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{1}{vol B_{r_j}(x)} \int\limits_{B_{r_j}(x)} f(y)\,dy \;\geq\; c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad x \in A, \;\; \frac{1}{vol B_r(x)} \int\limits_{B_r(x)} f(y) \geq c - \epsilon\}$ é un ricoprimento fino di $A$. Fissato $\Omega$ aperto, $A \subset \Omega$, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V},\;\; B_j \subset \Omega$ palle chiuse disgiunte tali che $L^N\left(A \setminus \cup_j B_j\right) = 0$ e quindi

$$L^N(A) \leq L^N\left((A \setminus \cup_j B_j) \cup_j B_j\right) \leq \sum_j vol(B_j) \leq \frac{1}{c-\epsilon} \sum_j \int_{B_j} f \leq \frac{1}{c-\epsilon} \int_\Omega f$$

In particolare, se $\Omega_j := \{|x| < j\}$, $L^N(\{f^\sharp \geq c\} \cap \Omega_j) \leq \int f < +\infty \; \forall\, j$, e quindi $L^N(\{f^\sharp \geq c\} \leq \int f < +\infty$.

**Prova del Teorema di differenziazione**. Possiamo supporre, sostituendo $f$ con $f\,\chi_{B_R}$ , che sia $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$. Posto

$$L(x) := \limsup_{r \to 0} \left[ \frac{1}{vol B_r} \int_{B_r(x)} |f(x) - f(y)|\, dy \right] \qquad \text{si tratta di provare che}$$

$$L^N(\{x: \quad L(x) \,\geq\, \alpha\}) \,=\, 0 \quad \forall \alpha > 0. \qquad \text{Fissata} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$$

si ha
$$L(x) \leq \limsup_{r \to 0} \left[ \frac{1}{vol B_r} \int_{B_r(x)} \left(|f(x) - \varphi(y)| + |\varphi(y) - f(y)|\right)\, dy \right] \leq$$

$\leq \; |f(x) - \varphi(x)| + |f - \varphi|^\sharp(x).$ Fissato $\alpha > 0$ si ha quindi

$$\{x: \quad L(x) \,\geq\, \alpha\} \,\subset\, \{x: \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\} \;\cup\; \{x: \quad (f-\varphi)^\sharp(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

e quindi, per il Lemma 1, $\qquad L^N(\{x: \quad L(x) \,\geq\, \alpha\}) \,\leq$

$$\leq\; L^N(\{x: \quad |f(x) - \varphi(x)| \geq \frac{\alpha}{2}\}) + L^N(\{x: \quad |f - \varphi|^\sharp(x) \geq \frac{\alpha}{2}\}$$

$$\leq \frac{2}{\alpha} \int_{|f-\varphi| \geq \frac{\alpha}{2}} |f - \varphi| \;+\; \frac{2}{\alpha} \int_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \quad \leq\; \frac{4}{\alpha} \int_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \qquad \text{e quindi}$$

$$L^N(\{x: \quad L(x) \,\geq\, \alpha\}) \quad \leq \quad \frac{4}{\alpha} \quad \inf \left\{ \int_{\mathbf{R}^N} |f - \varphi| \;: \quad \varphi \in C_0^\infty \right\} \;=\; 0$$

**Corollario 1**. Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Allora

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)\, dt \;=\; f(x) \;\; q.o. \; x$$

Prova. Applicando L-B, otteniamo quasi per ogni $x$,

$$|\frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(t)\, dt \;-\; f(x)| \;=\; |\frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(t)\, dt \;-\; \frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(x)\, dt| \leq$$

$$\leq \frac{2}{2|r|}\int_{x-|r|}^{x+|r|} |f(t)-f(x)|\,dt \rightarrow_{r\to 0}$$

NOTA. Il Corollario 1 vale anche con $\mu$ misura di Radon al posto di $L^1$.

**Corollario 2**. Sia $\mu$ misura boreliana finita in $\mathbf{R}^N$, assolutamente continua rispetto a $L^n$. Allora, la 'derivata di Radon-Nykodim'

$$\frac{d\mu}{dx} := \frac{d\mu}{dL^N}(x) := \lim_{r\to 0}\frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)}$$

esiste $L^N$-quasi ovunque, é $L^N$-sommabile e

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\mu}{dL^N}\,dL^N$$

Infatti, per Radon-Nikodym, esiste $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ tale che $\mu(E) = \int_E f\,dL^N$. Quindi

$$\frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)} = \frac{\int_{B_r(x)} f}{vol(B_r)} \rightarrow_r f(x) \quad L^N - q.o.\ x$$

Questo risultato si puó estendere ad ogni misura di Radon mediante una estensione (ovvia ma importante) del Lemma 1, ed il Lemma 3 che ne deriva.

**Lemma 2**. Sia $\nu$ misura boreliana in $\mathbf{R}^N$ tale che

$$\forall\, A \subset \mathbf{R}^N : \qquad \nu(A) = \inf\{\nu(\Omega) : A \subset \Omega,\ \ \Omega \text{ aperto}\}$$

Allora, se $c > 0$, $A \subset \{x : \limsup\limits_{r\to 0} \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c\} \ \Rightarrow\ \nu(A) \geq c\, L^n(A)$

**Lemma 3**. Sia $\nu$ misura di Radon singolare rispetto a $L^N$. Allora

$$\frac{\nu(B_r(x))}{L^N(B_r(x))} \rightarrow_{r\to 0} 0 \quad q.o.x$$

Ció segue subito, come detto, dal Lemma2. Infatti, sia $L^N(Z) = 0 = \nu(Z^c)$. Allora, per ogni $c > 0$, si ha

$$L^N(\{x :\ \limsup_{r\to 0}\frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \geq c\} \ =\ L^N(\{x \in Z^c :\ \limsup_{r\to 0}\frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \geq c\} \leq$$

$$\leq \frac{1}{c}\nu(\{x \in Z^c :\ \limsup_{r\to 0}\frac{\nu(B_r(x))}{volB_r(x)} \geq c\}) = 0$$

**Prova Lemma 2.** Sia $A_n := A \cap B_n$, $B_n$ palla aperta di raggio $n$. Fissato $\epsilon \in (0, c)$,

$$x \in A_n \quad \Rightarrow \quad \exists r_j \to 0 : \quad \frac{\nu(B_{r_j}(x))}{vol(B_{r_j}(x))} \geq c - \epsilon$$

Dunque, $\mathcal{V} := \{B_r(x) : \quad \frac{\nu(B_r(x))}{vol(B_r(x))} \geq c - \epsilon\}$ é un ricoprimento fino di $A_n$. Fissato $\Omega$ aperto contenente $A$ e posto $\Omega_n := \Omega \cap B_n$, dal Lemma di Vitali otteniamo

$\exists B_j \in \mathcal{V}$ tali che $\quad L^N(A_n \setminus \cup_j B_j) = 0$. Come sopra,

$$L^N(A_n) \leq \sum_j vol(B_j) \leq \frac{1}{c - \epsilon} \sum_j \nu(B_j) \leq \frac{1}{c - \epsilon} \nu(\Omega_n)$$

Siccome $\nu$ é borel regolare, si ottiene

$$(c - \epsilon) L^N(A) = \lim_n L^N(A_n)(c - \epsilon) \leq \nu(\Omega)$$

La tesi segue dall'ipotesi $\nu(A) = \inf\{\nu(\Omega) : \Omega \quad \text{aperto}, \quad A \subset \Omega\}$.

NOTA. Come nel Lemma di Vitali, il Lemma 2 continua a valere se a $L^N$ si sostituisce una qualsiasi misura di borel regolare.

**Corollario 2 bis**. Sia $\mu$ misura boreliana finita in $\mathbf{R}^N$. Allora

$$\frac{d\mu}{dx} := \frac{d\mu}{dL^N}(x) := \lim_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)} \quad \text{esiste} \quad L^N - q.o., \text{é sommabile e}$$

$$\mu_{ac}(E) = \int_E \frac{d\mu}{dL^N} \, dL^N$$

Infatti, se $\mu = \mu_{ac} + \mu_s$ é la decomposizione di Lebesgue di $\mu$ rispetto alla misura di lebesgue $L^N$, per Radon-Nikodym esiste $f \in L^1(\mathbf{R}^N)$ tale che $\mu_{ac}(E) = \int_E f \, dL^N$. Quindi

$$\frac{\mu(B_r(x))}{vol(B_r)} = \frac{\int_{B_r(x)} f + \mu_s(B_r(x))}{vol(B_r)} \to_r f(x) \quad L^N - q.o. \ x$$

## Funzione di distribuzione di una misura di Radon in R.

Se $\mu$ é misura di Radon in $\mathbf{R}$, tale che $\mu((-\infty, x)) < +\infty \ \forall x$, resta definita la **funzione di distribuzione di** $\mu$ :

$$F_\mu(x) := \mu((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} d\mu$$

Nota che $F := F_\mu$ é non decrescente, $F(-\infty) = 0$ e

$x < b \Rightarrow F(b) - F(x) = \mu([x, b)) \to_{x\to b^-} 0, \qquad x > b \Rightarrow F(x) - F(b) \to_{x\to b^+} \mu(\{b\})$

e quindi $F_\mu$ **é continua a sinistra in $b$ ed é continua in $b$ se e solo se $\mu(\{b\}) = 0$.**

Esempio. Se $\mu_f(E) := \int_E f dx, \ f \geq 0$ Lebesgue integrabile, allora $F := F_{\mu_f}$ non é altro che la funzione integrale di $f$.

Inoltre $\quad F_\mu$ **é derivabile $L^1$-quasi ovunque e** $\quad \frac{dF_\mu}{dx}(x) = \frac{d\mu}{dx}$ $q.o.x.$

Infatti, dal Corollario 2:

$$\mu(E) = \int_E \frac{d\mu}{dx} dx + \mu_s(E) \quad \forall E \text{ boreliano, e quindi} \quad F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d\mu}{dt} dt + \mu_s((-\infty, x))$$

Si tratta quindi di mostrare che la funzione di distribuzione di una misura singolare (rispetto alla misura di Lebesgue) ha derivata nulla q.o.. Ció segue dal Lemma 3:

$$\left| \frac{1}{t}[\mu_s((-\infty, x+t)) - \mu_s((-\infty, x))] \right| \leq 2 \ \frac{\mu_s\left(\,[\,x - |t|, x + |t|\,]\,\right)}{2|t|} \to_{t\to 0} 0$$

Possiamo quindi scrivere: $\qquad F_\mu(x) = \int_{-\infty}^{x} F'_\mu(t)\, dt + \mu_s((-\infty, x))$

**Problema 1**.

Quali funzioni sono distribuzioni di misure (e sono, in particolare, derivabili q.o.)?

Lo sono tutte le funzioni $F$ nondecrescenti inferiormente limitate e 'normalizzate' ( cioé continue a sinistra in ogni punto). Ovvero, se $F$ é non decrescente, inferiormente limitata e $\lim_{x\to x_0^-} F(x) = F(x_0)$ per ogni $x_0$, allora esiste una misura di Borel $\mu_F$ tale che $F(x) := \mu_F((-\infty, x)) \ \forall x$ e quindi

$F$ é derivabile q.o. e $\qquad F(x) = F(-\infty) + \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt + (\mu_F)_s((-\infty, x))$

Sostituendo $F$ con $F(x) - F(-\infty)$, possiamo supporre che $F(-\infty) = 0$. Sia

$$\mu_F(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} [\,F(b_j) - F(a_j)\,] : \quad A \subset \cup_j \ [\,a_j,\, b_j\,)\,\}.$$

É facile vedere che $\mu_F$ é misura metrica e quindi Boreliana ed infatti di Radon ($\mu$ si chiama misura di Lebesgue-Stieltijes generata da $F$). Inoltre , chiaramente,

$\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$ e quindi $\mu((-\infty, x)) = F(x)$ $\forall x \in \mathbf{R}$ e ció, per quanto visto, prova quanto asserito: $\frac{dF}{dx}(x) = \frac{d\mu_F}{dx}$.

Notiamo infine che $\mu(\{b\}) = [\lim_{t \to b^+} F(t)\,] - F(b)$ é, in $b$, il 'salto' di $F$.

ESEMPIO. Sia $F(x) = \chi_{(0,+\infty)}$. É $F(x) = \delta_0((-\infty, x))$.

**Corollario: le funzioni monotone sono derivabili q.o. con derivata localmente sommabile**.

**Problema 2**.

Per quali funzioni $F$ derivabili q.o. e con derivata (localmente) sommabile si ha

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt \qquad (Torricelli - Newton)\,?$$

ESEMPIO. La funzione di Cantor $f$ ( che é continua e non decrescente ), é derivabile q.o. con derivata nulla nel complementare dell'insieme di Cantor (ove é localmente costante), ma non é l'integrale della sua derivata: $f(x) \neq \int_0^x f' \equiv 0$!.

La formula di Torricelli-Newton per $F$ monotona ( con $F(-\infty) = 0$) dice che

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt \qquad \Leftrightarrow \qquad (\mu_F)_s = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mu_F \text{ é assolutamente continua.}$$

**Proposizione 1**. Sia $F(x) = \mu((-\infty, x))$. Allora $\mu$ é assolutamente continua se e solo se $F$ é assolutamente continua (AC) nel senso seguente.

Sia $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ . Dati $I_j = (a_j, b_j)$, $j = 1, \ldots, p$, $I_i \cap I_j = \emptyset$ $\forall i \neq j$ , scriveremo

$$\omega[F, \{a_j, b_j\}] := \sum_{j=1}^{p} |F(b_j) - F(a_j)|$$

**Definizione (di funzione AC)**. $F$ é AC in $[a, b]$ se $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$:

$$\sum_{j=1}^{p}(b_j - a_j) \leq \delta \ \Rightarrow\ \omega[F, \{a_j, b_j\}] \leq \epsilon$$

Dimostrazione della Prop. 1. Se $\mu$ é assolutamente continua, allora, per Radon-Nikodym, esiste una $f$ localmente sommabile tale che $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f dt$. L'assoluta continuitá di $F$ é allora conseguenza dell'assoluta continuitá dell'integrale. Viceversa, sia $F$ assolutamente continua. Allora

$$A \subset \cup_j\, (a_j, b_j),\ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) \leq \delta \ \Rightarrow\ \mu(A) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu([a_j, b_j))$$

$$\leq \sum_{j=1}^{\infty}[\,\mu((-\infty,b_j)\;-\;\mu((-\infty,a_j)\,]\;\leq\;\sum_{j=1}^{\infty}[\,F(b_j)-F(a_j)\,]\leq\epsilon$$

Dunque $L^1(A)=0 \;\Rightarrow\; \mu(A)=0$.

Dunque, nella classe delle funzioni monotone la validitá di (TN) equivale alla assoluta continuitá.

**Definizione di funzioni BV** (funzioni a variazione limitata)

$F$ é BV in $[a,b]$ se $V_a^b(F) := \sup\{\omega[F,\{a_j,b_j\}] \;:\; (a_j,b_j)\subset[a,b]\}<+\infty$

Esempio. Le funzioni monotone limitate, la differenza di funzioni monotone limitate.

**Lemma**.

(i) $V_a^x(F)$ é non decrescente e $x<y \;\Rightarrow\; V_a^y(F)=V_a^x(F)+V_x^y(F)$

(ii) $G(x):=V_a^x(F)-F(x)$ é non decrescente

(iii) $F$ é AC in $[a,b] \;\Rightarrow\; F$ é BV in $[a,b]$ e $V_a^x(F)$ é AC.

La (i) si verifica facilmente. La (ii) segue da $x<y \;\Rightarrow\; |F(x)-F(y)|\leq V_x^y(F)$. (iii): $F$ é AC $\;\Rightarrow\; \exists\delta:\; V_x^{x+\delta}(F)\leq 1 \;\forall x\in[a,b-\delta]$. Ció implica che $F$ é BV.

**Proposizione**. Se $F$ é BV in $[a,b]$, allora $F$ é derivabile q.o. in $[a,b]$.

Inoltre, vale (T-N), cioé $F(x)=F(a)+\int_a^x F'(t)dt$ se e solo se $F$ é AC

Estendiamo $F$ : $F(x)=F(a)\;\forall x\leq a,\; F(x)=F(b)\;\forall x\geq b$. Dal Lemma segue che $F=V_a^x(F)-[V_a^x(F)-F]$ é differenza di due funzioni monotone limitate e quindi é derivabile q.o. Se poi $F$ é AC, allora $F=F_1-F_2$ con $F_i$ nondecrescenti e AC: (T-N) vale per le $F_i$ e quindi vale anche per $F$.

APPENDICE:

**Prova del Lemma di Vitali** Nel seguito indicheremo con $B_r(x)$ una palla in $\mathcal{V}$ di raggio $r$ e centro $x$ e con $r=r(B)$ il raggio di un generico elemento $B$ di $\mathcal{V}$. Indichiamo $\Omega_1:=\Omega$. Posto

$\delta_1 := \sup\{r(B) : B\subset\Omega_1,\}$, sia $B_1\subset\Omega_1$ : $r_1:=r(B_1)\geq \dfrac{\delta_1}{2}$

Posiamo supporre (se no la dimostrazione é finita) che $\exists x \in A \setminus B_1$ e quindi $\exists\, B(x) \in \mathcal{V}$: $B \subset \Omega_2 := \Omega_1 \setminus B_1$. Posto

$$\delta_2 := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_2\} \le \delta_1 \qquad \text{sia} \qquad B_2 \subset \Omega_2 \;:\; r_2 := r(B_2) \ge \frac{\delta_2}{2}$$

Ovviamente $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Possiamo supporre, come sopra, che $\exists\, B \in \mathcal{V}$: $B \subset \Omega_3 := \Omega_2 \setminus B_2$, e, iterando, si trova (salvo terminare la dimostrazione in un numero finito di passi) che

$$\forall n \in \mathbf{N},\ \exists\ B_n \in \mathcal{V} \ :\quad B_{n+1} \subset \Omega_{n+1} \ :=\ \Omega_n \setminus B_n = \Omega_1 \setminus \left(\cup_{j=1}^{n} B_j\right) \quad \text{con}$$

$$r_{n+1} := r(B_{n+1}) \ge \frac{\delta_{n+1}}{2}, \qquad \delta_{n+1} := \sup\{r(B) : B \subset \Omega_{n+1}\} \le \delta_n$$

Notiamo che, siccome le palle $B_n$ sono disgiunte, allora

$$c_N \textstyle\sum_n r_n^N \ =\ L^N(\cup_n B_n) \ \le\ L^N(\Omega_1) \ <\ +\infty \quad \Rightarrow \quad r_n \to_n 0 \quad \Rightarrow \quad \delta_n \to_n 0.$$

Ció comporta che ogni palla $B$ deve intersecare qualche $B_k$, perché

$$B \cap [\cup_{k=1}^{n} B_k] = \emptyset \quad \Rightarrow \quad B \subset \Omega_{n+1} \Rightarrow \quad r(B) \le \delta_{n+1}$$

A sua volta ció comporta che, indicata con $\tilde{B}_n$ la palla concentrica a $B_n$ e di raggio $r(\tilde{B}_n) = 5 r_n$, allora

$$(*) \qquad x \in A,\ \ x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \quad \Rightarrow \quad \exists k \ge n : \qquad x \in \tilde{B}_k$$

Infatti, $x \in A,\ \ x \notin \cup_{j=1}^{n-1} B_j \ \Rightarrow\ \exists B(x) \in \mathcal{V}$, $B(x) \subset \Omega_n = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{n-1} B_j$ con $B(x)$ palla centrata in $x$ di raggio, diciamo, $r(x)$. D'accordo con quanto sopra osservato, esiste un primo indice $k \ge n$ tale che $B(x) \cap B_k \ne \emptyset$.

Dunque $\qquad B(x) \subset \Omega_k = \Omega \setminus \cup_{j=1}^{k-1} B_j \qquad$ e quindi $\qquad r(x) \le \delta_k \le 2 r_k$

Siccome $B(x) \cap B_k \ne \emptyset$, concludiamo che $B(x)$ é contenuta nella palla che ha lo stesso centro di $B_k$ e raggio $5 r_k$, cioé appunto $\tilde{B}_k$. Da $(*)$ segue che

$A \setminus (\cup_n B_n) \ \subset\ \cup_{k \ge n} \tilde{B}_k \quad \forall n.$ $\qquad$ Ma $\qquad L^N\left(\cup_{k\ge n} \tilde{B}_k\right) \le c_N\, 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$

e quindi
$$L^N\left(A \setminus\ (\cup_n B_n)\right) \ \le\ c_N\, 5^N \sum_{k=n}^{\infty} r_n^N \to_n 0$$