Il Teorema di Hille-Yosida

Eugenia Sironi

Definizioni e proprietà elementari degli operatori massimali monotoni

$|.|$ indica la norma Hilbertiana, ovvero $|u| = \sqrt{(u,u)}$.
$\mathcal{L}(H)$ è lo spazio degli operatori lineari continui da H in H.

Nel seguito H indicherà uno spazio di Hilbert.

Definizione 1. *Siano E ed F due spazi di Banach.*
*Un **operatore lineare illimitato** da E in F é un'applicazione lineare $A : D(A) \subset E \to F$ definita su un sottospazio vettoriale $D(A) \subset E$, a valori in F .*
$D(A)$ indica il dominio di A. $R(A) = \bigcup_{u \in D(A)} Au \subset F$ indica l' immagine di A. $G(A)$ indica il grafico di A.
A é limitato se esiste una costante $c \geq 0$ tale che $\|Au\| \leq c\|u\| \quad \forall u \in D(A)$.

Definizione 2. *Sia $A : D(A) \subset H \to H$ un operatore lineare illimitato.*
*A é **monotono** se $(Av, v) \geq 0 \quad \forall v \in D(A)$.*
*A é **massimale monotono** se inotre $R(I + A) = H$, ovvero*
$\forall f \in H, \quad \exists u \in D(A)$ tale che $u + Au = f$.

Proposizione 1. *Sia A un operatore massimale monotono, allora*

1. *$D(A)$ é denso in H.*
2. *A é chiuso.*
3. *$\forall \lambda > 0 \quad (I + \lambda A)$ é biiettivo da $D(A)$ in H, $(I + \lambda A)^{-1}$ é un operatore limitato e $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.*

Dimostrazione. 1. Sia $f \in H$ t.c. $(f, v) = 0$ per ogni $v \in D(A)$. Verifichiamo che $f = 0$. Infatti esiste $v_0 \in D(A)$ t.c. $v_0 + Av_0 = f$. Abbiamo $0 = (f, v_0) = |v_0|^2 + (Av_0, v_0) \geq |v_0|^2$. Dunque $v_0 = 0$ e quindi $f = 0$.

2. Prima di tutto osserviamo che $\forall f \in H$ esiste un unico $u \in D(A)$ tale che $u + Au = f$. Infatti se $\overline{u}$ fosse un altro elemento di $D(A)$ t.c.

$\overline{u} + A\overline{u} = f$, allora $(u - \overline{u}) + A(u - \overline{u}) = 0$. Ora $(u - \overline{u}, (u - \overline{u}) + A(u - \overline{u})) = |u - \overline{u}|^2 + (u - \overline{u}, A(u - \overline{u})) = 0$ e da fatto che A é monotono segue che $(A(u - \overline{u}), u - \overline{u})) \geq 0$, quindi $(u - \overline{u}) = 0$.
Abbiamo $|u|^2 + (Au, u) = (f, u)$ e $|f|^2 = |u|^2 + 2(Au, u) + |Au|^2$, quindi $|u| \leq |f|$. L'operatore $f \mapsto u$ denotato da $(I + A)^{-1}$ é dunque un operatore lineare limitato da H in H e $\|(I + A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$. Infatti $\|(I+A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} = sup_{f \in H} \frac{\|(I+A)^{-1}f\|}{\|f\|} = sup_{f \in H} \frac{\|u\|}{\|f\|} \leq \frac{\|f\|}{\|f\|} = 1$. Mostriamo che A é chiuso. Sia (u_n) una successione t.c. $u_n \in D(A)$ per ogni n, $u_n \to u$ e $Au_n \to f$. Bisogna verificare che $u \in D(A)$ e che $Au = f$. Sappiamo che $u_n + Au_n \to u + f$ e quindi $u_n = (I+A)^{-1}(u_n + Au_n) \to (I+A)^{-1}(u+f)$. Da questo segue che $u = (I+A)^{-1}(u+f)$, ovvero $u \in D(A)$ e $u + Au = u + f$.

3. Supponiamo che per un certo $\lambda_0 > 0$ si abbia $R(I + \lambda_0 A) = H$. Mostreremo che per ogni $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ si ha $R(I + \lambda A) = H$.
Cominciamo osservando (come per il punto 2) che per ogni $f \in H$ esiste un unico $u \in D(A)$ t.c. $u + \lambda_0 Au = f$. L'operatore $f \mapsto u$ è denotato da $(I + \lambda_0 A)^{-1}$ e $\|(I + \lambda_0 A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

   Cerchiamo di risolvere l'equazione

$$u + \lambda Au = f \quad \text{con} \quad \lambda > 0. \tag{1}$$

   Riscriviamo (1) nella forma

$$u + \lambda_0 Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u$$

   E ancora

$$u = (I + \lambda_0 A)^{-1}[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u]. \tag{2}$$

   Se $| 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda} |< 1$,ovvero $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$, allora (2) ammette soluzione grazie al Teorema del punto fisso di Banach. Per ipotesi A è massimale monotono, quindi $I + A$ è suriettiva. Da quello che abbiamo visto segue che $I + \lambda A$ è suriettiva per $\lambda > \frac{1}{2}$ $(I + A = I + \lambda_0 A$ per $\lambda_0 = 1)$ dunque anche per $\lambda > \frac{1}{4}$, ecc ,ecc. Per induzione si mostra che $I + \lambda A$ è suriettiva per ogni $\lambda > 0$.

$\square$

Osservazione 1. *Se A è massimale monotono, allora anche λA è massimale monotono per ogni $\lambda > 0$. Mentre se A e B sono due operatori massimali monotoni, questo non implica che $A + B$ (definito su $D(A) \cap D(B)$) sia un operatore massimale monotono.*

Definizione 3. *Sia A un operatore massimale monotono. Per ogni $\lambda > 0$ definiamo*

$$J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1} \quad e \quad A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$$

*J_λ è la **risolvente** di A e A_λ è la **regolarizzata Yosida** di A.*

Dalla Proposizione 1 segue che $\| J_\lambda \|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Proposizione 2. *Sia A un operatore massimale monotono, allora*

1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \quad \forall v \in H$ *e* $\forall \lambda > 0$
2. $A_\lambda v = J_\lambda(Av) \quad \forall v \in D(A)$ *e* $\forall \lambda > 0$
3. $| A_\lambda v | \leq | Av | \quad \forall v \in D(A)$ *e* $\forall \lambda > 0$
4. $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v \quad \forall v \in H$
5. $\lim_{\lambda \to 0} A_\lambda v = Av \quad \forall v \in D(A)$
6. $(A_\lambda v, v) \geq 0 \quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0$
7. $| A_\lambda v | \leq \frac{1}{\lambda} | v | \quad \forall v \in H, \forall \lambda > 0.$

Dimostrazione. 1. $A_\lambda v = A(J_\lambda v) \Leftrightarrow v = (J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda v)$. Questo è vero infatti $(J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda v) = (I + \lambda A)^{-1} v + \lambda A((I + \lambda A)^{-1} v) = v$.

2. Abbiamo

$$Av = \frac{1}{\lambda}[(I + \lambda A)v - v] = \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(v - J_\lambda v)$$

e dunque

$$J_\lambda A v = (I + \lambda A)^{-1} A v = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda v) = A_\lambda v$$

3. $| A_\lambda v | \leq | Av |$ poichè $A_\lambda v = J_\lambda A v$ (dal punto 2) e $\| J_\lambda \|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

4. Supponiamo che $v \in D(A)$; Allora $\mid v - J_\lambda v \mid = \lambda |\frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)v| = \lambda \mid A_\lambda v \mid \leq \lambda \mid Av \mid$ (dal punto 3). Dunque $\lim_{\lambda\to 0} J_\lambda v = v$.
   Passiamo ora al caso generale, sia $v \in H$ e $\epsilon > 0$. Dalla Proposizione 1 abbiamo che $\overline{D(A)} = H$. Quindi esiste $v_1 \in D(A)$ t.c. $\mid v - v_1 \mid \leq \epsilon$.

   $$\mid J_\lambda v - v \mid \leq \mid J_\lambda v - J_\lambda v_1 \mid + \mid J_\lambda v_1 - v_1 \mid + \mid v_1 - v \mid \leq 2 \mid v - v_1 \mid$$
   $$+ \mid J_\lambda v_1 - v_1 \mid \leq 2\epsilon + \mid J_\lambda v_1 - v_1 \mid.$$

   Ne segue che $\lim_{\lambda\to 0} sup \mid J_\lambda v - v \mid \leq 2\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$ e dunque $\lim_{\lambda\to 0} |J_\lambda v - v| = 0$.

5. $\lim_{\lambda\to 0} A_\lambda v = lim_{\lambda\to 0} J_\lambda A v = Av \quad \forall v \in D(A)$.

6. $(A_\lambda v, v) = (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) = (A_\lambda v, \lambda A_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) = \lambda \mid A_\lambda v \mid^2 + (A(J_\lambda v), J_\lambda v)$ infatti dalla definizione di A_λ abbiamo $A_\lambda v = \frac{1}{\lambda} v - \frac{1}{\lambda} J_\lambda v \Rightarrow \lambda A_\lambda v = v - J_\lambda v \Rightarrow (A_\lambda v, v - J_\lambda v) = (A_\lambda v, \lambda A_\lambda v) = \lambda |A_\lambda v|^2$ e dal punto 1 $A_\lambda v = A(J_\lambda v)$.
   A è massimale monotono quindi $(A(J_\lambda v), J_\lambda v) \geq 0$ da cui segue che

   $$(A_\lambda v, v) \geq \lambda \mid A_\lambda v \mid^2 \geq 0. \tag{3}$$

7. $\mid A_\lambda v \mid^2 \leq \frac{1}{\lambda}(A_\lambda v, v) \leq \frac{1}{\lambda} \mid (A_\lambda v, v) \mid \leq \frac{1}{\lambda} \mid A_\lambda v \| v \mid$ dove la prima e l'ultima disuguaglianza seguono rispettivamente dall'espressione 3 e dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Dunque $\mid A_\lambda v \mid \leq \frac{1}{\lambda} \mid v \mid$.

□

Osservazione 2. *Dalla Proposizione 2 osserviamo che $(A_\lambda)_{\lambda>0}$ è una famiglia di operatori limitati, che si avvicinano a A quando λ tende a 0 e $\| A_\lambda \|_{\mathcal{L}(H)}$ esplode quando λ tende a 0.*

Risoluzione del problema dell'evoluzione

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad \text{su} \quad [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Esistenza e unicità

Cominciamo ricordando un risultato classico : il Teorema di Cauchy, Lipschitz, Picard.

Teorema 1. *Sia E uno spazio di Banach e $F : E \to E$ un'applicazione t.c.*

$$\| Fu - Fv \| \leq L \| u - v \| \quad \forall u, v \in E \quad (L \geq 0).$$

Allora per ogni $u_0 \in E$ esiste un'unica $u \in C^1([0, +\infty); E)$ t.c.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Fu \quad su \quad [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \quad (dato\ iniziale) \end{cases} \tag{4}$$

Dimostrazione. **Esistenza**
Risolvere (4) è equivale a trovare $u \in C([0, +\infty); E)$ t.c.

$$u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds. \tag{5}$$

Dato $k > 0$ (che sarà fissato ulteriormente) introduciamo

$$X = \{u \in C([0, +\infty); E) | \quad Sup_{t \geq 0} \quad e^{-kt} \| u(t) \| < \infty\}$$

Si possono verificare le proprietà seguenti

- X è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|u\|_X = Sup_{t \geq 0} \quad e^{-kt} \|u(t)\|$
- Per ogni $u \in X$ la funzione

  $$(\Phi u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds.$$

  appartiene a X.
- $\|\Phi u - \Phi v\|_X \leq \frac{L}{k} \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X.$

  Per $k > L$, Φ ammette un punto fisso che è una soluzione di (5).

Unicità
Siano u e $\overline{u}$ due soluzioni di (4). Ponendo $\psi(t) = \|u(t) - \overline{u}(t)\|$, otteniamo grazie a (5)

$$\psi(t) \leq L \int_0^t \psi(s)ds \quad \forall t \geq 0$$

Infatti $\psi(t) = \|u_0 + \int_0^t F(u(s))ds - u_0 - \int_0^t F(\overline{u}(s))ds\| = \| \int_0^t F(u(s)) - F(\overline{u}(s))ds\| \leq \int_0^t L\|u(s) - \overline{u}(s)\|ds = L \int_0^t \psi(s)ds.$
Dunque $\psi \equiv 0$.

□

Questo Teorema è molto importante per lo studio delle equazioni differenziali ordinarie, ma è praticamente inutilizzabile per risolvere delle equazioni alle derivate parziali. Il risultato che segue è al contrario uno strumento molto utile per la risoluzione di equazioni alle derivate parziali di evoluzione.

Teorema 2. ***(Hille-Yosida)***
Sia A un operatore massimale monotono in uno spazio di Hilbert H. Allora per ogni $u_0 \in D(A)$ esiste un'unica funzione

$$u \in C^1([0,+\infty); H) \cap C([0,+\infty); D(A))$$

t.c.

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 \quad su \quad [0,+\infty) \\ u(0) = u_0 \quad (dato\ iniziale). \end{cases} \tag{6}$$

Inoltre $|u(t)| \le |u_0| \quad e \quad |\frac{du}{dt}(t)| = |Au(t)| \le |Au_0| \quad \forall t \ge 0.$

Osservazione 3. *L'interesse principale di questo teorema risiede nel fatto che per risolvere il problema dell'evoluzione (6) ci si riconduce a verificare che A è massimale monotono, ovvero a studiare l'equazione stazionaria $u + \lambda Au = f$.*

Dimostrazione. La dimostrazione è divisa in 6 passi.
Passo 1 : Unicità
Siano u e $\overline{u}$ due soluzioni di (6). Allora

$$\left(\frac{d}{dt}(u-\overline{u}), (u-\overline{u})\right) = -(A(u-\overline{u}), u-\overline{u}) \le 0.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-\overline{u}(t)|^2 = \left(\frac{d}{dt}(u(t)-\overline{u}(t)), (u(t)-\overline{u}(t))\right)$$

Infatti se $\varphi \in C^1([0,\infty); H)$ allora $|\varphi|^2 \in C^1([0,\infty); H)$ e $\frac{d}{dt}|\varphi|^2 = 2(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi)$.
Dunque la funzione $t \mapsto |u(t) - \overline{u}(t)|$ è decrescente su $[0,+\infty)$.
Da $|u(0) - \overline{u}(0)| = 0$ deduciamo che

$$|u(t) - \overline{u}(t)| = 0 \quad \forall t \ge 0.$$

Per dimostrare l'esistenza di u, sostituiamo A con la sua regolarizzata di Yosida A_λ, stabiliamo diverse stime indipendenti da λ e passiamo al limite

per λ che tende a 0.
Sia u_λ la soluzione del problema

$$\begin{cases} \frac{du_\lambda}{dt} + A_\lambda u_\lambda = 0 \quad \text{su} \quad [0,+\infty) \\ u_\lambda(0) = u_0 \in D(A) \end{cases} \tag{7}$$

La soluzione u_λ esiste grazie al Teorema di Cauchy-Lipshitz-Picard applicato con $F = -A_\lambda$.
Passo 2
Abbiamo la stima

$$|\frac{du_\lambda}{dt}(t)| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0| \quad \forall t \geq 0, \quad \forall \lambda > 0. \tag{8}$$

Questa uguaglianza segue direttamente dal seguente Lemma.

Lemma 1. *Sia $w \in C^1([0,+\infty);H)$ una funzione t.c.*

$$\frac{dw}{dt} + A_\lambda w = 0 \quad su \quad [0,+\infty) \tag{9}$$

Allora le funzioni $t \mapsto |w(t)|$ e $t \mapsto |\frac{dw}{dt}(t)| = |A_\lambda w(t)|$ sono decrescenti su $[0,+\infty)$.

Dimostrazione. Abbiamo $(\frac{dw}{dt}, w) + (A_\lambda w, w) = 0$.
Dalla Proposizione 2 segue che $(A_\lambda w, w) \geq 0$ e quindi $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w|^2 = (\frac{dw}{dt}, w) = -(A_\lambda w, w) \leq 0$ (dato che A è massimale monotono).
Dal fatto che A_λ è un operatore lineare limitato e da (9) si deduce che w è C^∞ e

$$\frac{d}{dt}(\frac{dw}{dt}) + A_\lambda(\frac{dw}{dt}) = 0.$$

Applichiamo quello che precede a $\frac{dw}{dt}$.

□

Passo 3
Per ogni $t \geq 0 \quad u_\lambda(t)$ converge, quando λ tende a 0, verso un limite denotato con $u(t)$; inoltre questa convergenza è uniforme in t su ogni intervallo limitato $[0,T]$.
Infatti se $\lambda, \mu > 0$ abbiamo

$$\frac{du_\lambda}{dt} - \frac{du_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0$$

da cui segue che
$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 = (\frac{d}{dt}(u_\lambda - u_\mu), u_\lambda - u_\mu) = (-A_\lambda u_\lambda + A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = -(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu)$
ovvero

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0. \tag{10}$$

Allora

$$\begin{cases} (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) = \\ (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu) + (A(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu) \\ \geq (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu). \end{cases} \tag{11}$$

Sa (8), (10) e (11) deduciamo che

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda - u_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|Au_0|^2$$

e integrando

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)|^2 \leq 4(\lambda + \mu)t|Au_0|^2$$

ovvero

$$|u_\lambda(t) - u_\mu(t)| \leq 2\sqrt{(\lambda + \mu)t}|Au_0| \tag{12}$$

Ne segue che, per ogni $t \geq 0$, $(u_\lambda(t))$ è di Cauchy e dunque converge quando $\lambda \to 0$ verso un limite denotato da $u(t)$. Passando al limite in (12) quando $\mu \to 0$ otteniamo

$$|u_\lambda(t) - u(t)| \leq 2\sqrt{\lambda t}|Au_0|.$$

Quindi la convergenza è uniforme in t su ogni intervallo limitato $[0, T]$ e $u \in C([0, \infty); H)$.

Passo 4

Supponiamo che $u_0 \in D(A^2)$ ovvero che $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 \in D(A)$. Allora $\frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge quando $\lambda \to 0$, per ogni $t \geq 0$ e uniformemente in t su ogni intervallo limitato $[0, T]$.
Infatti poniamo $v_\lambda = \frac{du_\lambda}{dt}$ allora $\frac{dv_\lambda}{dt} + A_\lambda v_\lambda = 0$.
Procedendo come per il passo 3 otteniamo
$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 = -(A_\lambda v_\lambda - A_\mu v_\mu, v_\lambda - v_\mu) \leq \lambda |A_\lambda v_\lambda|^2 + \mu |A_\mu v_\mu|^2 + (\lambda + \mu)(|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|) = (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda(|A_\lambda v_\lambda| + \mu |A_\mu v_\mu|)$. Quindi

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda(|A_\lambda v_\lambda| + \mu |A_\mu v_\mu|) \tag{13}$$

Dal Lemma 1 abbiamo

$$|A_\lambda v_\lambda| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0| \tag{14}$$

Infatti $A_\lambda u_0 = -\frac{du_\lambda}{dt}(0) = -v_\lambda(0)$.
Abbiamo anche

$$|A_\mu v_\mu| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|. \tag{15}$$

Inoltre dato che $Au_0 \in D(A)$ abbiamo

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0$$

e dunque

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq |A^2 u_0|, \quad |A_\mu A_\mu u_0| \leq |A^2 u_0|. \tag{16}$$

Da (13), (14), (15),(16) segue

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq 2(\lambda + \mu)|A^2 u_0|^2$$

Infatti
$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq_{(13)} (|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|)(\lambda |A_\lambda v_\lambda| + \mu |A_\mu v_\mu|) \leq_{(14),(15)} (|A_\lambda A_\lambda u_o| + |A_\mu A_\mu u_0|)(\lambda |A_\lambda A_\lambda u_o| + \mu |A_\mu A_\mu u_0|) \leq_{(16)} (|A^2 u_0| + |A^2 u_0|)(\lambda |A^2 u_0| + \mu |A^2 u_0|) = 2(\lambda + \mu)|A^2 u_0|^2$.
Si conclude, come per il passo 3, che $v_\lambda(t) = \frac{du_\lambda}{dt}(t)$ converge quado $\lambda \to 0$ per ogni $t \geq 0$ e uniformemente in t su ogni intervallo limitato $[0, T]$.

Passo 5

Esiste una soluzione di (6) se supponiamo che $u_0 \in D(A^2)$.
Infatti da quello visto fino ad ora sappiamo che per ogni $T < \infty$

$$\begin{cases} u_\lambda(t) \to u(t), \quad \text{quando} \quad \lambda \to 0, \quad \text{uniformemente su} \quad [0,T], \\ \frac{du_\lambda}{dt}(t) \quad \text{converge, quando} \quad \lambda \to 0 \quad \text{uniformemente su} \quad [0,T]. \end{cases}$$

Ne risulta che $u \in C^1([0,\infty);H)$ e che $\frac{du_\lambda}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}$, quando $\lambda \to 0$, uniformemente su $[0,T]$. Riscriviamo (7) nella forma

$$\frac{du_\lambda}{dt}(t) + A(J_\lambda u_\lambda(t)) = 0. \tag{17}$$

Osserviamo che $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$ per $\lambda \to 0$, infatti

$|J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| \le |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \le |u_\lambda(t) - u(t)| +$
$|J_\lambda u(t) - u(t)| \to 0$ se $\lambda \to 0$.

Applicando il fatto che il grafico di A, $G(A)$ è chiuso, deduciamo da (17) che $u(t) \in D(A) \quad \forall t \ge 0$ e

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) = 0.$$

Infine dato che $u \in C^1([0,\infty);H)$, la funzione $t \mapsto Au(t)$ è continua da $[0,\infty)$ in H e dunque $u \in C([0,\infty);D(A))$.
Abbiamo così ottenuto una soluzione di (6) t.c. $|u(t)| \le |u_0|, \quad \forall t \le 0$ e $|\frac{du}{dt}(t)| \le |Au_0|, \quad \forall t \ge 0$. Infatti (dal punto 2 del Lemma 1) $t \mapsto |u(t)|$ è decrescente su $[0,\infty)$ e $|\frac{du}{dt}(t)| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \le |Au_0|, \quad \forall \lambda > 0 \quad \forall t \ge 0$.
Per concludere utilizzeremo il Lemma seguente.

Lemma 2. *Sia $u_0 \in D(A)$. Allora*
$\forall \epsilon > 0, \quad \exists \overline{u}_0 \in D(A^2)$ *t.c.* $|u_0 - \overline{u}_0| < \epsilon$ *e* $|Au_0 - A\overline{u}_0| < \epsilon$.
Ovvero $D(A^2)$ è denso in $D(A)$ (rispetto alla norma del grafico $|u| + |Au|$).

Dimostrazione. Sia $\overline{u}_0 = J_\lambda u_0$, in modo che $\overline{u}_0 \in D(A)$ e $\overline{u}_0 + \lambda A\overline{u}_0 = u_0$. Dunque $A\overline{u}_0 \in D(A)$,ovvero $\overline{u}_0 \in D(A^2)$.
Dalla Proposizione 2 sappiamo che

$$A\overline{u}_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda A u_0$$

e

$$\lim_{\lambda\to 0}|J_\lambda u_0 - u_0| = 0, \quad \lim_{\lambda\to 0}|J_\lambda A u_0 - A u_0| = 0.$$

Scegliamo allora λ abbastanza piccolo per ottenire il risultato desiderato.

□

Passo 6

Sia $u_0 \in D(A)$. Grazie al Lemma 2 esiste una successione $(u_{0n}) \in D(A^2)$ t.c. $u_{0n} \to u_0$ e $Au_{0n} \to Au_0$. Dal passo 5 sappiamo che esiste una soluzione u_n del problema

$$\begin{cases} \frac{du_n}{dt} + Au_n = 0 \quad \text{su} \quad [0, +\infty) \\ u_n(0) = u_{0n} \end{cases} \tag{18}$$

Inoltre

$$|u_n(t) - u_m(t)| \le |u_{0n} - u_{0m}| \to 0$$

$$|\frac{du_n}{dt}(t) - \frac{du_m}{dt}(t)| \le |Au_{0n} - Au_{0m}| \to 0$$

per $m, n \to \infty$

Dunque $u_n \to u(t)$ uniformemente su $[0,\infty)$ e $\frac{du_n}{dt}(t) \to \frac{du}{dt}(t)$ uniformemente su $[0,\infty)$ con $u \in C^1([0,\infty); H)$.
Passando al limite in (18), grazie al fatto che A è chiuso, si vede che $u \in C([0,\infty); D(A))$ e che u verifica (6). □

Osservazione 4. *Sia u_λ la soluzione di (7).*

- *Supponiamo che $u_0 \in D(A)$. Sappiamo dal passo 3 che quando $\lambda \to 0$, $u_\lambda(t)$ converge, per ogni $t \ge 0$, verso un limite denotato da $u(t)$. Si può mostrare che $u \in C^1([0,\infty); H) \cap C([0,\infty); D(A))$ e che u verifica (6).*

- *Supponiamo che $u_0 \in H$. Possiamo mostrare che , quando $\lambda \to 0$, $u_\lambda(t)$ converge per ogni $t \ge 0$ verso un limite denotato da $u(t)$. Ma può accadere che $u(t) \notin D(A)$, $\forall t > 0$ e che $u(t)$ non sia differenziabile in alcun punto di $[0,\infty)$. Dunque a forziori $u(t)$ non può essere una soluzione classica di (6). Infatti , in questo caso il problema (6) non possiede alcuna soluzione in senso classico. Tuttavia consideriamo $u(t)$ come soluzione generalizzata di (6).*

Osservazione 5. *Sia $t \geq 0$, consideriamo l'applicazione lineare $S_A(t) : u_0 \mapsto u(t)$ da $D(A)$ in $D(A)$, dove $u(t)$ è la soluzione di (6) ottenuta nel Teorema 2.*

Dato che $|S_A(t)u_0| \leq |u_0|$

si può prolungare S_A per continuità e densità in un operatore lineare continuo da H in se stesso. Questo prolungamento si indica sempre con $S_A(t)$. Si verifica che $S_A(t)$ possiede le seguenti proprietà :

- *Per ogni $t \geq 0$, $S_A(t) : H \to H$ è un operatore lineare continuo e $\|S_A(t)\|_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$*
- $\begin{cases} S_A(t_1 + t_2) = S_A(t_1) \circ S_A(t_2) & \forall t_1 \geq 0, \forall t_2 \geq 0 \\ S_A(0) = I \end{cases}$
- $\lim_{t \to 0, t \geq 0} |S_A(t)u_0 - u_0| = 0 \quad \forall u_0 \in H.$

Una famiglia $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ di operatori di $\mathcal{L}(H)$ definita per ogni valore del parametro $t \geq 0$ e verificante le proprietà sopraelencate è per definizione un semi-gruppo continuo di contrazioni.
Si può mostrare (vedi Yosida K. Functional Analysis) che dato un semi-gruppo continuo di contrazioni S(t), esiste un unico operatore massimale monotono t.c. $S(t) = S_A(t)$ per ogni $t \geq 0$.
Si stabilisce quindi una corrispondenza biunivoca tra gli operatori massimali monotoni e i semi-gruppi continui di contrazioni.

Osservazione 6. *Sia A un operatore massimale monotono e sia $\lambda \in \mathbb{R}$. La risoluzione di*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au + \lambda u = 0 \quad su \quad [0, +\infty) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

si riconduce alla risoluzione di (6). Infatti basta porre $v(t) = e^{\lambda t}u(t)$. Allora v verifica

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} + Av = 0 \quad su \quad [0, +\infty) \\ v(0) = u_0 \end{cases}$$