Misure invarianti su gruppi topologici localmente compatti: esistenza e unicitá della misura di Haar

Filippo Maria Bonci *Giovanni Mecozzi*

Indice

1 Gruppi Topologici

In generale, per definire le convoluzioni[1] *in* $\mathbb{R}^n$, *é necessario utilizzare due argomenti fondamentali della teoria della misura: l'esistenza e l'invarianza (per traslazioni) di una misura boreliana completa su* $\mathbb{R}^n$ *(misura di Lebesgue). Detto ció é possibile immaginare una generalizzazione della teoria della misura su gruppi commutativi dotati di una misura boreliana completa e invariante rispetto alla moltiplicazione. Naturalmente una misura boreliana presuppone l'esistenza di una topologia, e tale topologia dovrá necessariamente essere compatibile con la struttura di gruppo. Risulta necessario quindi, enunciare la seguente*

Definizione 1. *Un gruppo topologico é un insieme* $\mathcal{G}$ *che sia al tempo stesso un gruppo rispetto ad un'operazione* $*$ *ed uno spazio topologico rispetto ad una topologia* $\mathcal{T}$ *in modo che la funzione:*

$$\begin{array}{rccc} \mu: & \mathcal{G}\times\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & (g,h) & \longmapsto & g * h^{-1} \end{array}$$

risulti continua.

Osservazione 2. *Su* $\mathcal{G} \times \mathcal{G}$ *c'é la topolgia prodotto*

Notazione: *Siano* $E, F \subseteq \mathcal{G}$ *allora abbiamo che:*

1. $xE = \{z \in \mathcal{G} : z = xy, y \in E\}$
2. $E^{-1} = \{x \in \mathcal{G} : x^{-1} \in E\}$
3. $EF = \{xy \in \mathcal{G} : x \in E, y \in F\}$

1.1 Un pó di storia

Storicamente la nozione di gruppo topologico é nata dallo studio dei gruppi di trasformazioni continue, ma sviluppi successivi della teoria hanno messo in chiaro che era proprio la naturale interazione tra la struttura di gruppo e di spazio topologico a caratterizzare le proprietá piú interessanti. Il primo ad interessarsi a quelli che poi verrano chiamati gruppi topologici é stato Marius Sophus Lie verso il 1874, il quale, in particolare, si interessó a gruppi localmente euclidei. Attorno al 1900 David Hilbert e Luitzen Egbertus Jan Brouwer si interessarono a gruppi topologici piú generali. Ad esempio Brouwer dimostró che l'insieme di Cantor puó

[1] Siano f e g due funzioni, allora l'integrale $f * g = \int f(x-y)g(y)dy$, qualora abbia senso, viene detto prodotto di convoluzione.

essere reso un gruppo topologico abeliano[2]. *Fu peró Franciszek Leja il primo a trattarli ufficialmente nel 1927, mentre Otto Schreier diede la prima assiomatizzazzione nel suo libro Abstakte Kontinuierliche Gruppen, studiando i gruppi che erano L-spazi di Fréchet. I primi autori a trattare i gruppi topologici (Lev Semenovich Pontryagin, Hans Freudenthal, Alfréd Haar) si limitavano a studiare i gruppi a base numerabile, fu André Weil a rimuovere dalla seconda edizione di Pontryagin le restrizioni sulla base numerabile.*

1.2 Proprietá

1. *Se* $a_1, \ldots, a_n \in \mathcal{G}$ *sono tali che* $a_1^{r_1}, \ldots, a_n^{r_n} = c$ *per* $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{N}$ *allora per ogni intorno* W *di* c *esistono* $U_1, \ldots, U_n$ *intorni di* $a_1, \ldots, a_n$ *tali che* $U_1^{r_1}, \ldots, U_n^{r_n} \subset W$

2. *Sia* $a \in \mathcal{G}$ *allora* $f(x) = ax$, $g(x) = xa$, $h(x) = x^{-1}$ *sono automorfisimi di* $\mathcal{G}$

3. *Siano* $E, F, H \subseteq \mathcal{G}$ *e sia* $a \in \mathcal{G}$, E *un chiuso,* F *un aperto e* H *un insieme qualsiasi, allora* aE, Ea *e* E^{-1} *sono chiusi, mentre* FH, HF *e* F^{-1} *sono aperti*

4. *Per ogni coppia di elementi* $a, b \in \mathcal{G}$ *esiste un omomorfismo* ϕ *tale che* $\phi(a) = b$, *ovvero* $\mathcal{G}$ *si dice omogeneo*

5. *Dalla continuitá di* $h(x) = x^{-1}$ *segue che ogni intorno* U *dell'unitá del gruppo risulterá tale se e solo se* $U^{-1} = \left\{x^{-1} : x \in U\right\}$ *é anch'esso un intorno dell'unitá. Osserviamo inoltre come tutti gli intorni simmetrici dell'unitá* e $\left(V = V^{-1}\right)$ *formino una base per intorni di* e, *infatti per ogni intorno* U *di* e *si ha che:* $V = U \cap U^{-1} \subseteq U$

6. *Ogni automorfismo interno* $x \longrightarrow sxs^{-1}$ *dove* $s \in \mathcal{G}$ *é un omeomorfismo. Poiché l'automorfismo mappa* e *in* e *allora ogni intorno* U *di* e *risulta tale se e solo se* sUs^{-1} *é intorno di* e

7. *Un gruppo topologico é* T_2 *se e solo se* $\{e\}$ *é un chiuso in* $\mathcal{G}$, *infatti se* $\mathcal{G}$ *é* T_2 *allora* $\{e\}$ *é un chiuso per ogni* $g \in \mathcal{G}$; *viceversa se* $\{e\}$ *é un chiuso allora posso scegliere due elementi diversi tali che* $ab^{-1} \neq 0$, *allora esiste un intorno* U *di* e *per cui* $e \notin Uab^{-1}$. *Se* V *é un intorno di* e *tale che* VV[3]$\subseteq U$ *allora* Va *e* Vb^{-1} *risultano essere due intorni disgiunti di* a *e* b^{-1} *rispettivamente*

8. *Un gruppo topologico é* T_1 *se e solo se é* T_2, *infatti* T_2 *implica* T_1 *mentre, viceversa, se il gruppo topologico é* T_1 *allora la diagonale* $\Delta \subset \mathcal{G} \times \mathcal{G}$ *risulta essere controimmagine di* $\mu^{-1}(e)$ *del chiuso* $\{e\}$. *Poiché* μ[4] *é continua abbiamo che la controimmagine di un chiuso é chiusa*

[2][L.E.J. Brouwer] On the perfect structure of perfect sets of points, Proc. Acad. Amsterdam (1910).

[3]$\{xy : x, y \in V\}$.

[4]Dove $\mu(g, h) = g * h^{-1}$.

Consideriamo ora alcuni esempi di gruppi topologici:

1. Ogni gruppo finito é topologico rispetto alla topologia discreta[5]

2. Dato che il prodotto di compatti é compatto possiamo dire che un prodotto infinito di gruppi finiti é un gruppo compatto e non discreto.[6] Un gruppo compatto non discreto é dato dal prodotto numerabile di copie di $\mathbb{Z}_2$[7]

3. Una classe notevole di gruppi topologici é data dai gruppi di matrici:

   (a)
   $$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) \neq 0\}$$
   La topologia del gruppo lineare generale reale é indotta da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ infatti $GL(n, \mathbb{R})$ é proprio un aperto di $\mathbb{R}^{n^2}$ poiché complementare del chiuso: $\{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) = 0\}$

   (b)
   $$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$$
   La topologia del gruppo lineare speciale reale é indotta da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$, mentre la topologia del gruppo lineare speciale complesso é indotta da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{(n^2)^2}$

4. Non ogni gruppo dotato di una topologia risulta essere un gruppo topologico:

   (a) Consideriamo il seguente gruppo $(\mathbb{R}, \tau^{cof}, +)$ dove τ^{cof} é la topologia cofinita[8]. La topologia cofinita é chiaramente T_1 ma poiché non é T_2 si contraddice la proprietá 8, infatti, presi comunque $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x \neq y$, esisteranno due intorni U e V di x e y, rispettivamente, che saranno della forma:
   $$U = \mathbb{R} \setminus \{x_i\}_{i=1}^N \qquad V = \mathbb{R} \setminus \{y_i\}_{i=1}^M$$
   Poiché
   $$U \cap V = \mathbb{R} \setminus \Big\{ \{x_i\}_{i=1}^N \cup \{y_i\}_{i=1}^M \Big\} \neq \emptyset$$
   la topologia cofinita non sará T_2

   (b) Consideriamo il seguente gruppo $(\mathbb{R}, \tau^{zar}, +)$ dove τ^{zar} é la topologia di Zariski.[9] Tale gruppo non é topologico dato che la topologia di Zariski é T_1 ma non

[5] Questa osservazione fornisce numerosi esempi di gruppi topologici non commutativi.

[6] Un discreto compatto é finito.

[7] Gli elementi di $\mathbb{Z}_2$ sono $\{-1; 1\}$.

[8] La topologia cofinita su un insieme X è la topologia i cui chiusi sono tutti e soli i sottoinsiemi finiti, oltre a X stesso.

Questa topologia è la meno fine fra tutte quelle che soddisfano l'assioma T_1 di separabilità; in altre parole, è la meno fine fra tutte quelle in cui ciascun punto costituisce un insieme chiuso. Se X è un campo, questa coincide con la topologia di Zariski, in cui i chiusi sono gli insiemi su cui si annullano i polinomi.

[9] Gli aperti sono i complementari dei finiti.

é T_2 poiché ogni aperto é denso

1.3 Premesse Topologiche

Come negli spazi metrici si puó parlare di vicinanza anche nei gruppi topologici. É sufficiente, infatti, considerare un intorno simmetrico dell'unitá e affermare che $a, b\mathcal{G}$ *sono* U*-vicini se* $a \in bU$*. Le traslazioni sinistre e destre permettono di vedere un gruppo topologico in due differenti modi (il modo risulta unico se il gruppo topologico é abeliano): come* Spazio Uniforme[10] *oppure come* Gruppo Topologico Completamente Regolare*. Segue allora che se un gruppo é* T_0 *o Kolmogorov*[11] *allora é anche* T_2 *(e* T_3 *e di Tychonoff*[12]*).*

In un gruppo topologico vale la seguente

Proposizione 1. Sia $A \subseteq \mathcal{G}$, allora la chiusura di A sod∃disfa:

$$\overline{A} = \bigcap_V AV = \bigcap_V VA$$

(L'intersezione é su tutti gli intorni dell'unitá e)

Notazione: *Ogni gruppo topologico sará assunto* T_2 *come spazio topologico*

Proposizione 2. Per un gruppo topologico $\mathcal{G}$ sono equivalenti:

1. G é T_0
2. G é T_3
3. $\overline{\{1\}} = \{1\}$

Corollario 1. *Se* $E, F \in \mathcal{G}$ *sono due compatti tali che* $E \cap F = \emptyset$ *allora esiste un intorno* W *dell'unitá di* $\mathcal{G}$ *tale che:* $WEW = WFW = \emptyset$

Definizione 3. Uno spazio regolare é uno spazio topologico che soddisfa il seguente assioma di separazione: ''Per ogni chiuso C di X, e per ogni punto x non appartenente a C, esistono un intorno aperto U di x e un aperto V contenente C che siano disgiunti.

[10] In topologia,uno spazio uniforme é uno spazio topologico dotato di una struttura uniforme, che consente di definire proprietá conformi come la completezza, la continuitá uniforme e la convergenza uniforme.

[11] Ogni coppia di punti é topologicamente indistinguibile.

[12] Completamente regolare e T_2

Definizione 4. *Uno spazio normale é uno spazio topologico che soddisfa il seguente assioma di separazione: ''Per ogni coppia di chiusi disgiunti E e F, esiste una coppia di aperti disgiunti U e V tali che U contiene E e V contiene F''*

Definizione 5. *Si definisce spazio completamente normale uno spazio tale che per ogni coppia di chiusi disgiunti E e F, esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $f(E) = 0 \quad \forall y \in E$ e $f(F) = 1 \quad \forall x \in F$*

Lemma 1. *(Urysohn) Sia X uno spazio normale, allora per ogni coppia di chiusi disgiunti E e F di X, esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ che valga 0 su tutto E e 1 su tutto F*

Il lemma mostra, quindi, che essere completamente normale non é affatto piú restrittivo che essere normale, bensí le due proprietá risultano essere equivalenti: uno spazio normale é completamente normale.

Definizione 6. *Si definisce spazio perfettamente normale uno spazio tale che per ogni coppia di chiusi disgiunti E e F, esiste una funzione continua $f : X \longrightarrow [0,1]$ tale che $f^{-1}(0) = E \quad \forall y \in E$ e $f^{-1}(1) = F \quad \forall x \in F$*

Lemma 2. *Uno spazio topologico X é normale se e solo se per ogni sottoinsieme chiuso F di X e per ogni sottoinsieme aperto W di X che contiene F esiste una successione $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ di insiemi aperti di X tali che*

$$F \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \qquad e \qquad \overline{X_n} \subseteq W$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$

Dimostrazione. *Se X é uno spazio T_4 allora esiste un aperto W_1 che contiene F e $\overline{W_1} \subseteq W$. Allora basta prendere la successione costante $W_n = W_1$. Supponiamo adesso che X soddisfi le condizioni dell'ipotesi e consideriamo due chiusi A e B disgiunti. Definiamo ora $F = A$ e $W = X \setminus B$. Abbiamo costruito allora la successione $W_1, \ldots, W_n, \ldots$ di insiemi aperti di X tali che*

$$A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n \qquad e \qquad \overline{X_n} \cap B = \emptyset$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Scambiando ora A e B nel seguente modo $F = B$ e $W = X \setminus A$ abbiamo una successione $V_1, \ldots, V_n, \ldots$ di aperti di X tali che

$$B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \qquad e \qquad \overline{V_n} \cap A = \emptyset$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. Siano adesso

$$O_i = W_i \setminus \bigcup_{k=i} \overline{V_k} \qquad e \qquad U_i = V_i \setminus \bigcup_{k=i} \overline{W_k}$$

allora O_i e U_i sono aperti e chiaramente avremo che

$$A \subseteq O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n \qquad e \qquad B \subseteq U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$$

□

Lemma 3. *Ogni spazio compatto e T_2 é normale*

Dimostrazione. *Mostriamo innanzitutto che ogni spazio compatto e T_2 é regolare. Sia X uno spazio compatto e T_2, F in chiuso di X e $x \in X$ tale che $x \notin F$. Allora per ogni $y \in F$ esistono due aperti disgiunti U e V tali che $x \in U$ e $y \in V$. Poiché F é compatto esistono $y_1, \dots, y_n \in F$ tali che l'aperto $Z = \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ contiene y. Allora $W = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ é un intorno aperto di x tale che $U \cap V = \emptyset$. Ora si X uno spazio compatto e T_2 e siano $F, G \subseteq X$ due chiusi disgiunti. Applicando lo stesso ragionamento possiamo assumere X regolare e, quindi, trovare per ogni $x \in \mathcal{G}$ intorni disgiunti di $\mathcal{G}$ e di x.*

□

Definizione 7. `Uno spazio topologico é detto completamente regolare se e solo se dati un insieme chiuso` F `e un punto` x `che non appartiene a` F`, esiste una funzione continua` $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ `tale che` $f(x) = 0$ `e` $f(y) = 1 \quad \forall y \in F$.[13]

Definizione 8. `Uno spazio é detto di Tychonoff se é completamente regolare e di Hausdorff. Gli spazi di Tychonoff vengono comunemente indicati con` T_π

Osserviamo come, con qualche approfondimento sui gruppi topologici, si possa dimostrare che ogni gruppo topologico T_0 é anche di Tychonoff.[14]

Osserviamo che una delle caratteristiche piú importanti degli spazi di Thychonoff é che la loro struttura é preservata dalle piú comuni operazioni topologiche. In particolare vale che se uno spazio prodotto é di Tychonoff lo é anche ciascun fattore.

Definizione 9. `In topologia uno spazio topologico é detto localmente compatto se per ogni suo punto` x `esiste un intorno la cui chiusura é un insieme compatto.`

Definizione 10. `In topologia uno spazio topologico é detto precompatto se la sua chiusura risulta essere un compatto`

Lemma 4. *Ogni spazio localmente compatto e T_2 é completamente regolare*

[13] Si dice anche che x e F sono separati da una funzione.
[14] Questo teorema prende il nome di Birkhoff-Kakutani.

Dimostrazione. *Sia $x \in X$ e si scelga un intorno aperto U di x tale che $\overline{U}$ sia compatto. Allora $\overline{U}$ é completamente regolare. Se F é un chiuso in X allora esiste un intorno aperto V di x tale che $\overline{V} \subseteq U$ e $V \cap F = \emptyset$. Poiché $\overline{U}$ é regolare possiamo trovare una funzione contiuna $f : \overline{U} \longrightarrow [0,1]$ con $f(\overline{U} \setminus V) = 0$ e $f(x) = 1$. Estendiamo ora f a tutto lo spazio X ponendo $f(z) = 0$ per ogni $z \in X \setminus \overline{U}$* □

Corollario 2. *Ogni gruppo localmente compatto e numerabile é discreto*

1.4 Gli Zero Insiemi

Definizione 11. *Si definisce uno zero-insieme di una funzione l'insieme formato dai punti in cui la funzione assume valore nullo. Piú precisamente, data una funzione $f : X \longrightarrow \mathcal{G}$, lo zero-insieme di f é la controimmagine dell'elemento neutro del gruppo $\mathcal{G}$, e viene cosí descritto*

$$Z(f) = f^{-1}(0) \subseteq X$$

Osserviamo come i punti dello zero insieme corrispondono alle radici dell'equazione $f(x) = 0$. L'insieme complementare di uno zero-insieme viene chiamato cozero-insieme e corrisponde a tutti i punti in cui la funzione assume valore non nullo.

1.4.1 Proprietá

1. *In topologia tutti gli zero-insiemi vengono da funzioni continue*
2. *Gli zero-insiemi sono sempre chiusi; il viceversa in generale é falso*
3. *Uno spazio topologico X é completamente regolare se e solo se ogni suo insieme chiuso é intersezione di una famiglia di zero-insiemi, ovvero se e solo se i cozero-insiemi formano una base di X*
4. *Uno spazio topologico X é completamente normale se e solo se ogni insieme chiuso é uno zero-insieme, ovvero se e solo se ongi insieme aperto é un cozero-insieme*

1.5 Il teorema di Peter-Weyl

Diamo ora giusto un accenno su come costruire misure invarianti su gruppi topologici precompatti e abeliani senza dover fare uso della misura di Haar.
L'enorme vantaggio di tale teorema risulta essere, infatti, quello di, sfruttando il teorema di Folner, evitare di introdurre l'integrale di Haar. Inziamo con il dare alcune definizioni:

Definizione 12. *Un gruppo topologico $\mathcal{G}$ si dice precompatto se per ogni sottoinsieme aperto non vuoto U di $\mathcal{G}$ esiste un insieme finito F tale che $\mathcal{G} = FU$*

La teoria delle rappresentazioni dei gruppi finiti ha una notevole applicazione sui gruppi compatti e finiti, infatti, si sono ottenuti buoni risultati calcolando i valori medi sugli elementi dei gruppi. Tali risultati possono essere estesi ai gruppi infiniti, sostituendo le medie con integrali, e ai gruppi localmente compatti, utilizzando la misura di Haar.

Definizione 13. *Siano $\mathcal{G}$ un gruppo topologico e V uno spazio vettoriale é un omomorfismo di gruppi da $\mathcal{G}$ a $GL(V)$, ovvero il gruppo generale lineare su V. In altre parole una rappresentazione é una mappa*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \longrightarrow & GL(V) \\ & (g_1) & \longmapsto & \rho(g_1) \end{array}$$

In questo caso V viene chiamato spazio di rappresentazione e la dimensione di V viene chiamata dimensione della rappresentazione

Definizione 14. *Siano $\mathcal{G}$ un gruppo topologico, V uno spazio vettoriale, F un campo e ρ una rappresentazione*

$$\rho : \mathcal{G} \longrightarrow GL(V) \cong GL_n(F)$$

Allora per ogni $g \in G$ la funzione

$$\begin{array}{rccc} \chi_\rho: & \mathcal{G} & \longrightarrow & F \\ & g & \longmapsto & tr_{\rho(g)} \end{array}$$

prende il nome di carattere associato a ρ e

$$dim_F(V) = deg(\rho)$$

Nota: *La funzione $tr_{\rho(g)}$ é la funzione che somma gli elementi della diagonale di $\rho(g)$*

Teorema 15. $(F\emptyset lner)$ *Sia $\mathcal{G}$ un gruppo precompatto abeliano. Allora per ogni sottoinsieme V di $\mathcal{G}$ esistono $\delta > 0$ e caratteri continui χ_i, $i = 1, \ldots, n$, con $U(\chi_1, \ldots, \chi_n, \delta) \subseteq V$*

Teorema 16. *Sia $\mathcal{G}$ un gruppo precompatto abeliano. Allora per ogni $x \in \mathcal{G}$, $x \neq 0$, esiste un carattere continuo χ tale che $\chi(x) \neq 0$*

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ definiamo $\mathbb{U}(n)$ il gruppo unitario di ordine n. Tale gruppo é il sottogruppo di $GL_n(\mathbb{C})$ che possiede tutte le matrici unitarie M ($\overline{M}^t * M = I_n$). Poiché $\mathbb{U}(n)$ é omeomorfo ad un insieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}^{n^2}$ allora $\mathbb{U}(n)$ é compatto.

Teorema 17. *(Peter-Weyl) Sia $\mathcal{G}$ un gruppo toplogico compatto e $x \in \mathcal{G}$ un elemento diverso da 1. Allora esistono $n \in \mathbb{N}$ ed un omomorfismo continuo $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{U}(n)$ tale che $f(x) \neq I_n$ in $\mathbb{U}(n)$*

Notazione: Definiamo ora $\mathbb{U} = \prod_{n=1}^{+\infty} \mathbb{U}(n)$

Lemma 5. *Ogni gruppo compatto é topologicamente isomorfo ad un sottogruppo di qualche potenza di* $\mathbb{U}$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathcal{G}$ con $x \neq 1$ consideriamo l'omomorfismo $f_\alpha : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{U}(n)$ tale che $f_\alpha(x) \neq I_n$ (Possiamo considerare lo stesso omomorfismo in $\mathbb{U}$). Ora l'omomofismo diagonale $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{U}^{\mathcal{G}\setminus\{1\}}$ risulta iniettivo e suriettivo. Per la compattezza di $\mathcal{G}$ tale omomorfismo risulta essere una immersione topologica. Poiché $f(\mathcal{G})$ é un sottogruppo compatto di $\mathbb{U}^{\mathcal{G}\setminus\{1\}}$ é un chiuso. $\square$

2 La Misura di Alfréd Haar

Ricordiamo come la misura di Lebesgue sia l'unica misura completa invariante per traslazioni su di una σ-algebra contenente gli intervalli in $\mathbb{R}$ tale che $\mu([0,1]) = 1$. La misura di Haar, per un gruppo topologico localmente compatto, sará una generalizzazione della misura di Lebesgue e costituirá un modo per assegnare un "volume" ai sottoinsiemi di un gruppo topologico localmente compatto.

Definizione 18. Un σ-anello é una classe non vuota di insiemi S tale che:

1. Se E e F appartengono a S allora $E \setminus F \in S$
2. Se $E_i \in S$ allora $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in S$

Notiamo come se un σ-anello S é contenuto nell'insieme delle parti di qualche insieme X allora S é una σ-algebra se e solo se $X \in S$

Definizione 19. Siano X uno spazio T_2 localmente compatto e $\mathbb{D}$ la classe di tutti i compatti di X, definiamo allora boreliano ogni insieme appartenente al piú piccolo σ-anello contenente $\mathbb{D}$. Tale σ-anello verrá denotato con $\mathbb{S}$

Notazione: *Chiameremo limitato un sottoinsieme di uno spazio topologico localmente compatto contenuto in un compatto*

Definizione 20. Sia X uno spazio topologico T_2 localmente compatto, una misura di Borel su X é una funzione $\nu : \mathbb{S} \longrightarrow [0, +\infty]$ tale che:

1. Sia σ-additiva
2. Valga $\nu(\emptyset) = 0$
3. Valga $\nu(K) < +\infty$ per ogni K compatto in $\mathbb{D}$

Definizione 21. Sia $\mathbb{P}$ la classe di tutti gli insiemi boreliani. Una misura di Borel ν si dice essere regolare se per ogni compatto $K \in \mathbb{D}$ vale che:

$$\nu(K) = inf\,\{\nu(A) : K \subseteq A, A \in \mathbb{P}\}$$

Definizione 22. Sia $\mathcal{G}$ un gruppo topologico localmente compatto, e sia ν una misura di Borel regolare tale che:

1. Valga $\nu(A) > 0$ per ogni $A \in \mathbb{P} \setminus \{\emptyset\}$

Allora diremo che μ é una misura di Haar invariante a sinistra su $\mathcal{G}$ se per ogni $E \in S$ vale che:

$$\nu(g * E) = \nu(E)$$

con $g \in \mathcal{G}$

Esempio:

La misura di Haar sul gruppo topologico $(\mathbb{R}^n, +)$ che prende il valore 1 su $[0, 1]$ é uguale alla misura di Lebesgue ristretta ai sottoinsiemi di Borel di $\mathbb{R}$

Corollario 3. *Sia $\mathcal{G}$ un gruppo topologico localmente compatto e separabile, allora $\mathcal{G}$ possiede una misura invariante a sinistra unica a meno di una costante moltiplicativa detta misura di Haar*

2.1 L'integrale di Haar

L'approccio che useremo sará quello di introdurre una misura boreliana tramite l'integrale che essa definisce sullo spazio delle funzioni continue a supporto compatto (C_c).

Introduciamo allora l'insieme delle funzioni continue a supporto compatto non negative e denotiamo tale insieme con C_0. Notiamo subito come risulti ovvio definire la seguente applicazione:

$$I : C_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+$$

dove:

$$I(f + g) = I(f) + I(g) \qquad I(cf) = cI(f) \qquad \forall f, g \in C_0 \quad c \in \mathbb{R}$$

Nel caso di un gruppo topologico localmente compatto avremo esattamente l'integrale di Haar sinistro (rispettivamente destro). Denotiamo ora con C_0^+ l'insieme delle funzioni a valori positivi di C_c

Esempi:

1. *Sia $\mathcal{G} = (\mathbb{R}^\star, \mathcal{E}, \star)$ il gruppo moltiplicativo dei numeri reali non nulli e definiamo il funzionale:*

$$\begin{array}{rccc} \Lambda : & C_c(\mathbb{R}^\star) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{dx}{|x|} \end{array}$$

Sia $\mu^\star$ *la misura tale che* $d\mu^\star = \frac{dx}{|x|}$ *e mostriamo come sia invariante per traslazioni moltiplicative, infatti, se* $\alpha \in \mathbb{R}^\star_+$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)\frac{dx}{|x|}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\alpha}\frac{\alpha}{|\zeta|} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{dx}{|x|}$$

Mentre se $\alpha \in \mathbb{R}^\star_-$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x)\frac{dx}{|x|}dx = -\int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)\frac{d\zeta}{\alpha}\frac{-\alpha}{|\zeta|} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{dx}{|x|}$$

2. *Sia* $\mathcal{G} = GL_n(\mathbb{R})$ *allora la misura di Haar (destra e sinistra) é data da* $\dfrac{dX}{|det(X)|^n}$ *dove* dX *é proprio la misura di Haar (sinistra) su* $M_n(\mathbb{R})$*, cioé la misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}^{n^2}$. *Se* $f \in C_c\,(GL_n(\mathbb{R}))$*, si ha:*

$$\int_{GL_n(\mathbb{R})} f(AX)\frac{dX}{|det(X)|^n} =^{15} \int_{GL_n(\mathbb{R})} f(Y)\frac{dY|det(A^{-1})|^n}{|det(A^{-1}Y)|^n} =$$

$$= \int_{GL_n(\mathbb{R})} f(Y)\frac{dY}{|det(Y)|^n}$$

Infatti la mappa $T : X \longrightarrow AX$ *manda le colonne* x_μ *di* X *nelle colonne* Ax_j*, cioé* T *agisce come la somma diretta di* n *copie di* $t : x \longrightarrow Ax$

3. *Sia* $\mathcal{G} = (\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \mathcal{E}, \star)$ *e definiamo il funzionale:*

$$\begin{array}{cccc} \Lambda : & C_c(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_0^1 f(e^{2\pi i t})dt \end{array}$$

Allora Λ *é un funzionale positivo invariante a sinistra e quindi un funzionale di Haar*

2.1.1 Funzionali Lineari

Definizione 23. *Un funzionale di Haar é un funzionale lineare*

$$\lambda : C_c(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

positivo (i.e. $f \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda(f) \geq 0$*) non identicamente nullo e invariante a sinistra*

[15] AX=Y

Proposizione 3. *Sia λ un funzionale lineare positivo a valori in $\mathbb{R}$. Se λ é sia additivo che omogeneo su C_0^+, allora ammette una sola estensione a C_c che é proprio un integrale positivo*

Proposizione 4. *Sia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(x+y) = f(x)f(y)$ e $f(0) = 1$, allora esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = e^{ax}$*

Dimostrazione. Poiché esiste un unico $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(1) = e^{ax}$ avremo che $f(n) = e^{an}$. Sia ora $g(x) = f(x)e^{-ax}$, allora $g(x+y) = g(x)g(y)$, $g(0) = 1$, $g(n) = 1$ e g é una funzione continua. Ovviamente per ogni $m \in \mathbb{R}$ si ha che $g(\frac{n}{m})^m = g(n) = 1$ allora $g(\frac{n}{m}) = 1$ per continuitá e, quindi, $f(x) = e^{ax}$ $\square$

2.2 Esistenza e Unicitá

Sia ora $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$ l'insieme delle funzioni continue, a valori reali, definite su $\mathcal{G}$ e, per ogni $\alpha \in \mathcal{G}$ definiamo le seguenti mappe:

1.
$$L_y : C_0(\mathcal{G}) \longrightarrow C_0(\mathcal{G})$$
Dove $L_y f(x) = f(y^{-1}x) \qquad y \in \mathcal{G}$

2.
$$R_y : C_0(\mathcal{G}) \longrightarrow C_0(\mathcal{G})$$
Dove $R_y f(x) = f(xy) \qquad y \in \mathcal{G}$

3.
$$J : C_0(\mathcal{G}) \longrightarrow C_0(\mathcal{G})$$
Dove $Jf(x) = f(x^{-1})$

Il motivo per cui viene usata la notazione y^{-1} per L_y e y per R_y é perché

$$L_{yz} = L_y L_z \qquad R_{yz} = R_y R_z$$

Definizione 24. *Un sottoinsieme Z di $C_0([0,1])$ é detto equicontinuo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta_\epsilon > 0$ tale che*

$$x, y \in [0,1] \qquad |x-y| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad \forall f \in Z$$

Teorema 25. *(Ascoli-Arzelá) Sia $Z \subset C_0([0,1])$ allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

1. Z é chiuso, limitato e equicontinuo

2. Z é compatto

Teorema 26. *(Rappresentazione di Riesz)* Siano X uno spazio T_2 localmente compatto e λ un funzionale lineare positivo su $C_c(X)$. Esiste, allora, un'unica misura μ, regolare e di Borel, su X che sia finita sui compatti di X e che sia tale che

$$\Lambda(f) = \int_X f d\mu \qquad \forall f \in C_c(X)$$

Lemma 6. *Sia $\mathcal{G}$ un gruppo topologico localmente compatto, si ha, allora, una corrispondenza biunivoca tra l'insieme delle misure μ di Haar e quello dei funzionali λ di Haar:*

$$\begin{array}{lccc} \Lambda: & \{\mu : \mu \quad misura \quad di \quad Haar\} & \longrightarrow & \{\lambda : \lambda \quad funzionale \quad di \quad Haar\} \\ & \mu & \longmapsto & d\mu \end{array}$$

In particolare se ν e μ sono due misure di Haar allora esiste $c > 0$ tale che $\nu = c\mu$

Teorema 27. Sia μ una misura di Radon (i.e. finita sui compatti) su un gruppo localmente compatto $\mathcal{G}$ e sia

$$\tilde{\mu}(E) = \mu(E^{-1})$$

Allora:

1. μ é una misura sinistra di Haar se e solo se $\tilde{\mu}$ é una misura destra di Haar
2. μ é una misura sinistra di Haar se e solo se $\displaystyle\int L_y f d\mu = \int f d\mu$ per ogni $f \in C_c(\mathcal{G})$ e per ogni $y \in \mathcal{G}$

Dimostrazione. La prima condizione é ovvia. Dimostriamo direttamente la seconda condizione. Per ogni misura di Radon μ si ha

$$\int L_y f d\mu = \int f d\mu_y \quad \forall \quad f \in C_c(\mathcal{G})$$

dove $\mu_y(E) = \mu(y * E)$. Ora se μ é una misura di Haar quando

$$\int L_y f d\mu = \int f d\mu$$

manterrá le stesse condizioni per ogni$f \in C_c(\mathcal{G})$. Per l'unicitá del teorema di rappresentazione di Riesz si ha che $\mu = \mu_y$

$\square$

La tecnica che useremo per dimostrare l'esistenza di una misura di Haar su un gruppo localmente compatto $\mathcal{G}$ é quella di mostrare l'esistenza su $\mathcal{G}$ di una misura di Radon invariante a sinistra; a meno che $\mathcal{G}$ sia un gruppo discreto! é, infatti, impossibile definire una misura invariante a destra numerabilmente additiva per tutti i sottoinsiemi di $\mathcal{G}$ assumendo l'assioma della scelta.

Teorema 28. *(Esistenza e Unicitá)* Sia $\mathcal{G}$ un gruppo compatto, allora

1. *Esiste un unico funzionale lineare positivo $\Lambda : C_0(\mathcal{G}) \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che*
   - $\Lambda(1) = 1$
   - $\Lambda(R_y f) = \Lambda(f) \qquad \forall y \in \mathcal{G}, \quad f \in C_0(\mathcal{G})$
   - $\Lambda(L_y f) = \Lambda(Jf) = \Lambda(f) \qquad \forall y \in \mathcal{G}, \quad f \in C_0(\mathcal{G})$

2. *Esiste una σ-algebra Σ costituita dai sottoinsiemi di $\mathcal{G}$ che contengono tutti i sottoinsiemi di Borel di $\mathcal{G}$ e che sia invariante per le moltiplicazioni (destre e sinistre) e per l'inversione, i.e.*

$$S \in \Sigma \Longrightarrow \begin{cases} \gamma S = \{\gamma\alpha | \alpha \in S\} \in \Sigma \\ S\gamma = \{\alpha\gamma | \alpha \in S\} \in \Sigma \\ S^{-1} = \left\{\alpha^{-1} | \alpha \in S\right\} \in \Sigma \end{cases}$$

3. *Esiste una misura μ su Σ tale che:*
   - $\mu(\gamma S) = \mu(S\gamma) = \mu(S^{-1}) = \mu(S) \qquad \forall S \in \Sigma$
   - $\mu(\mathcal{G}) = 1$
   - $\Lambda(f) = \int_{\mathcal{G}} f(\gamma) d\mu(\gamma)$

Dimostrazione. Per ogni $f \in C_0(\mathcal{G})$ definiamo i seguenti insiemi:

1. $$\mathbb{A}(f) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i L_{y_i} f : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, a_i > 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\} \subset C_0(\mathcal{G})$$

2. $$\mathbb{B}(f) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i R_{y_i} f : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}, a_i > 0, \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\} \subset C_0(\mathcal{G})$$

Denotiamo con $\overline{\mathbb{A}(f)}$ e $\overline{\mathbb{B}(f)}$ le rispettive chiusure e Λ il solito funzionale tale che $\Lambda(f)$ non vari se applicato a elementi nelle chiusure di $\mathbb{A}(f)$ e $\mathbb{B}(f)$. La dimostrazione si articolerá nei seguenti punti:

1. *Useremo il teorema di Ascoli-Arzelá per mostrare che $\overline{\mathbb{A}(f)}$ é un compatto di $C_0(\mathcal{G})$*

2. Mostreremo che $\overline{\mathbb{A}(f)}$ contiene una funzione costante

3. Mostreremo che $\overline{\mathbb{B}(f)}$ contiene una funzione costante

4. Mostreremo che esiste un'unica funzione costante $\mathfrak{f} \in \overline{\mathbb{A}(f)} \cap \overline{\mathbb{B}(f)}$

5. Definiremo $\mathfrak{f} = \Lambda(f)$ e mostreremo che tale funzione verifica le proprietá richieste

6. Dimostreremo che Λ é unico

7. Definiremo la misura μ e la σ-algebra Σ grazie al teorema di Rappresentazione di Riesz

Ora per ogni $f \in C_0(\mathcal{G})$ definiamo

- $M(f) = \max_{\gamma \in \mathcal{G}} f(\gamma)$
- $m(f) = \min_{\gamma \in \mathcal{G}} f(\gamma)$
- $v(f) = M(f) - m(f)$

Poiché $L_y L_z = L_{yz}$, $R_y R_z = R_{yz}$ e $JL_y = R_y J$ si ha

$$\mathbb{A}(L_\gamma f) = \mathbb{A}(f) \qquad \mathbb{B}(R_\gamma f) = \mathbb{B}(f) \qquad J\mathbb{A}(f) = \mathbb{B}(Jf)$$
$$\mathbb{A}(kf) = k\mathbb{A}(f) \qquad \mathbb{B}(kf) = k\mathbb{B}(f)$$

Passando alle chiusure:

$$\overline{\mathbb{A}(L_\gamma f)} = \overline{\mathbb{A}(f)} \qquad \overline{\mathbb{B}(R_\gamma f)} = \overline{\mathbb{B}(f)} \qquad \overline{J\mathbb{A}(f)} = \overline{\mathbb{B}(Jf)}$$
$$\overline{\mathbb{A}(kf)} = \overline{k\mathbb{A}(f)} \qquad \overline{\mathbb{B}(kf)} = \overline{k\mathbb{B}(f)}$$

1. Passo 1

   Dobbiamo mostrare che $\overline{\mathbb{A}(f)}$ é un compatto di $C_0(\mathcal{G})$. Osserviamo innanzitutto che:

$$\|\sum_{i=1}^{n} a_i L_{y_i} f\|_\infty \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \|L_{y_i} f\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} a_i \|f\|_\infty = \|f\|_\infty$$

   e, quindi, $\overline{\mathbb{A}(f)}$ contiene la palla chiusa di raggio $\|f\|_\infty$ centrata nell'origine. Ora vogliamo mostrare che $\overline{\mathbb{A}(f)}$ é un sottoinsieme equicontinuo di $C_0(\mathcal{G})$. Prendiamo un $\epsilon > 0$ e scegliamo un intorno N_ϵ di ϵ in G tale che $|f(y) - f(z)| < \epsilon$ per ogni $y^{-1}z \in N_\epsilon$. Allora:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i L_{y_i f(y) - \sum_{i=1}^{n} a_i L_{y_i f(z)}}\right| \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \left|[L_{y_i f(y)] - [L_{y_i f(z)}}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} a_i |f(y_i^{-1}y) - f(y_i^{-1}z)| = \sum_{i=1}^{n} a_i \epsilon = \epsilon$$

Infatti, quando, $y^{-1}z \in N_\epsilon$ *si ha che* $(y_i^{-1}y)(y_i^{-1}y) = y^{-1}y \in N_\epsilon$ *per ogni* $1 \leq i \leq n$. *Poiché* $\overline{\mathbb{A}(f)}$ *é un sottoinsieme equicontinuo, per Ascoli-Arzelá, é un compatto di* $C_0(\mathcal{G})$.

2. *Passo 2*

Dobbiamo mostrare che che $\overline{\mathbb{A}(f)}$ *contiene una funzione costante. Consideriamo, quindi, la funzione* $v(f)$ *definita prima che raggiunge il suo minimo esattamente nel punto* $f_\star \in \overline{\mathbb{A}(f)}$. *Abbiamo quindi due possibilitá:*

- $v(f_\star) = 0$ *e quindi* $f_\star$ *é una funzione costante*
- $v(f_\star) \neq 0$ *e quindi* $M(f_\star) > m(f_\star)$

Mostriamo ora come il secondo caso sia impossibile. Supponiamo, quindi, che $M(f_\star) > m(f_\star)$ *e definiamo*

$$W = \left\{\gamma \in \mathcal{G} : f_\star(\gamma) > \frac{M(f_\star) + m(f_\star)}{2}\right\}$$

in modo che per ogni $\alpha \in \mathcal{G}$ *si abbia* $\alpha W = \{\alpha\gamma : \gamma \in W\}$ *e che* $\{\alpha W\}_{\alpha \in \mathcal{G}}$ *sia un ricoprimento aperto di* $\mathcal{G}$. *Poiché* $\mathcal{G}$ *é compatto si ha che* $\mathcal{G} \subset a_1 W \cup \cdots \cup a_n W$ *con* $n \in \mathbb{N}$ *e* $a_i \in \mathcal{G}$. *Definiamo ora*

$$\tilde{f}_\star(\gamma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L_{\alpha_i} f_\star(\gamma)$$

Allora:

- $\tilde{f}_\star(\gamma) \in \overline{\mathbb{A}(f)}$ *dato che* $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} L_{y_i} g \in \mathbb{A}(f)$ *per ogni* $g \in \mathbb{A}(f)$
- $M(\tilde{f}_\star) \leq M(f_\star)$
- $m(\tilde{f}_\star) \geq m(f_\star) + \frac{1}{2n} v(f_\star)$[16]

[16] Per ogni $\gamma \in \mathcal{G}$ esiste un $1 \leq m \leq n$ per cui $\gamma \in y_m W$. Allora $y_m^{-1}\gamma \in W$ e, per come abbiamo definito W si ha $f_\star(y_m^{-1}\gamma) > \dfrac{M(f_\star) + m(f_\star)}{2}$. Allora $\tilde{f}_\star(\gamma) = \dfrac{1}{n} f_\star(y_m^{-1}\gamma) + \dfrac{1}{n} \sum_{i \neq m} f_\star(y_i^{-1}\gamma) > \dfrac{M(f_\star) + m(f_\star)}{2n} + \dfrac{1}{n} \sum_{i \neq m} m(f_\star) = \dfrac{M(f_\star)}{2n} + \dfrac{2n-1}{2n} m(f_\star) = m(f_\star) + \dfrac{v(f_\star)}{2n}$.

Quindi $v(\tilde{f}_\star) = M(\tilde{f}_\star) - m(\tilde{f}_\star) \leq M(f_\star) - m(f_\star) - \frac{1}{2n}v(f_\star) < M(f_\star) - m(f_\star) = v(f_\star)$ *che é in contraddizione con la tesi; allora* $v(f_\star) = 0$ *e* $f_\star$ *é una funzione costante.*

3. *Passo 3*

   Dobbiamo mostrare che $\overline{\mathbb{B}(f)}$ *contiene una funzione costante. Ma basta scegliere la stessa funzione del passo* 2 *e lavorare nella stessa maniera.*

4. *Passo 4*

   Dobbiamo mostrare che esiste un'unica funzione costante $\mathfrak{f} \in \overline{\mathbb{A}(f)} \cap \overline{\mathbb{B}(f)}$. *Per fare ció risulta sufficiente mostrare che, se* l *é una funzione costante di* $\overline{\mathbb{A}(f)}$ *e* h *é una funzione costante di* $\overline{\mathbb{B}(f)}$, *allora* $l = h$ *é una funzione costante di* $\overline{\mathbb{A}(f)} \cap \overline{\mathbb{B}(f)}$. *Sia* $\epsilon > 0$ *e scegliamo* $\alpha_i \in \mathcal{G}$, $a_i > 0$, $1 \leq i \leq m$ *e* $\beta_j \in \mathcal{G}$, $b_i > 0$, $1 \leq j \leq n$ *tali che*

   - $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = 1$
   - $\displaystyle\|l - \sum_{i=1}^{m} a_i L_{\alpha_i} f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$
   - $\displaystyle\|h - \sum_{j=1}^{n} b_i R_{\beta_j} f\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$

   In particolare, per ogni $1 \leq j \leq n$

   $$\sup_{\gamma \in G} \left| l - \sum_{i=1}^{m} a_i f(y_i^{-1}\gamma z_j) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

   e quindi

   $$\left| l - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j f(y_i^{-1}\gamma z_j) \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} l b_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j f(y_i^{-1}\gamma z_j) \right| \leq$$

   $$\leq \sum_{j=1}^{n} b_j \left| l - \sum_{i=1}^{m} a_i f(y_i^{-1}\gamma z_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

   Nello stesso identico modo

   $$\left| h - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j f(y_i^{-1}\gamma z_j) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Allora per la diseguaglianza triangolare si ha che $|l-h| \leq \epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$

5. Passo 5

Definiamo $c(f) = \Lambda(f)$ e, grazie ai passi 1 e 2 si ha che:

- $|\Lambda(f)| \leq \|f\|_\infty$
- $\Lambda(1) = 1$
- $\Lambda(kf) = k\Lambda(f)$
- $\Lambda(L_y f) = \Lambda(f)$
- $\Lambda(R_y f) = \Lambda(f)$
- $\Lambda(Jf) = \Lambda(f)$

Per ogni $f \in C_0(\mathcal{G})$ $k \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathcal{G}$. Poiché $\Lambda(f) \geq 0$ se $f \geq 0$ rimane da dimostare che $\Lambda(f_1 + f_2) = \Lambda(f_1) + \Lambda(f_2)$. Prendiamo, come prima, $\alpha_i \in \mathcal{G}$, $a_i > 0$, $1 \leq i \leq m$ dove $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$ e

$$\left| \Lambda(f_1) - \sum_{i=1}^{m} a_i L_{y_i} f_1(\gamma) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad (\star)$$

per ogni $\gamma \in \mathcal{G}$. Denotiamo ora con $\phi = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_i L_{y_i} f_2$. Poiché $\phi \in \mathbb{A}(f_2)$ allora $\mathbb{A}(\phi) \subset \mathbb{A}(f_2)$ e quindi $\overline{\mathbb{A}(\phi)} \subset \overline{\mathbb{A}(f_2)}$, allora $\Lambda(\phi) = \Lambda(f_2)$. Scegliamo $\beta_j \in \mathcal{G}$, $b_j > 0$, $1 \leq j \leq n$ dove $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} b_j = 1$ e

$$\left| \Lambda(f_2) - \sum_{j=1}^{n} b_i L_{z_j} \phi \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Per come abbiamo definito ϕ si ha che

$$\left| \Lambda(f_2) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i b_j f_2(y_i^{-1} z_j^{-1} \gamma) \right| = \left| \Lambda(f_2) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_i b_j L_{z_j y_i} f_2(\gamma) \right| =$$

$$= \left| \Lambda(f_2) \sum_{j=1}^{n} b_j L_{z_j} \sum_{i=1}^{m} a_i L_{y_i} f_2(\gamma) \right| = \left| \Lambda(f_2) - \sum_{j=1}^{n} b_j L_{z_j} \phi(\gamma) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Sostituendo $z_j^{-1}\gamma$ al posto di γ in $(\star)$ si ha:

$$\left|\Lambda(f_1) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j f_1(y_i^{-1} z_j^{-1}\gamma)\right| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Ora per la diseguaglianza triangolare si ha

$$\left|\Lambda(f_1) + \Lambda(f_2) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j (f_1 + f_2)(y_i^{-1} z_j^{-1}\gamma)\right| \leq \epsilon$$

Poiché $\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j (f_1+f_2)(y_i^{-1} z_j^{-1}\gamma) \in \mathbb{A}(f_1+f_2)$ *si ha che* $\Lambda(f_1)+\Lambda(f_2) \in \overline{\mathbb{A}(f_1 + f_2)}$. *Poiché esiste un'unica funzione costante in* $\overline{\mathbb{A}(f_1 + f_2)}$, *si ha la tesi*

6. *Passo 6*

   Dobbiamo dimostrare che Λ *é unico. Sia allora* Λ' *un funzionale lineare su* $C_{\mathbb{R}}(\mathcal{G})$ *tale che* $\Lambda'(1) = 1$ *e* $\Lambda'(f) = \Lambda'(L_y f)$ *per ogni* $f_{\mathbb{R}}(G)$ *e* $y \in \mathcal{G}$. *Per la linearitá del funzionale si ha che* $\Lambda'(\phi) = \Lambda'(f)$ *per ogni* $\phi \in \mathbb{A}(f)$, *in particolare per ogni* $\phi \in \overline{\mathbb{A}(f)}$. *Allora* $\Lambda(f) = \Lambda'(\Lambda(f)) = \Lambda'(f)$

7. *Passo 7*

   Dobbiamo ora definire la misura μ *e la* σ*-algebra* Σ. *Per fare ció utilizzaremo il teorema di Rappresentazione di Riesz. Definiamo* $\mu^\star$ *nel seguente modo*

$$\mu^\star(V) = sup\left\{\Lambda(f) : f \in C_0(G), \quad 0 \leq f \leq 1, \quad supp(f) \subset V\right\}$$

Allora $\Lambda(1) = 1$, $\mu^\star(G) = 1$, $\Lambda(L_\gamma f) = \Lambda(R_\gamma f) = \Lambda(Jf)$ *e* γV, $V\gamma^{-1}$ *e* V^{-1} *sono aperti di* V *tali che*

$$\mu^\star(\gamma V) = \mu^\star(V\gamma^{-1}) = \mu^\star(V^{-1})$$

Ora possiamo definire $\mu^\star$ *su tutti i sottoinsiemi di* $\mathcal{G}$ *nel seguente modo*

$$\mu^\star(S) = inf\left\{\mu^\star(V) : S \subset V, \quad V \quad aperto\right\}$$

e notare come tale misura sia una misura esterna, infatti

$$\mu^\star(\gamma S) = \mu^\star(S\gamma^{-1}) = \mu^\star(S^{-1})$$

Per avere la tesi basta definire Σ come la σ-algebra sugli insiemi $\mu^\star$-misurabili e scegliere come misura la misura μ ristretta a $\mu^\star$ di Σ

□

2.3 Applicazioni

2.3.1 Il Gruppo Ortogonale

$$O(n, \mathbb{R}) = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) : A^T A = I\right\}$$

La topologia del gruppo ortogonale reale é indotta da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. $O(n, \mathbb{R})$ é, infatti, un gruppo topologico compatto dove la norma di una matrice sará:

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |x_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Sia $\mathbb{R}^{n^2}$ lo spazio vettoriale reale delle matrici $n \times n$, allora per ogni $X \in \mathbb{R}^{n^2}$ si ha

1. $\|X^T\| = \|X\|$
2. $\|XY\| \leq \|X\|\|Y\|$ *con* $Y \in \mathbb{R}^{n^2}$
3. $\|QX\| = \|X\| = \|XQ\|$ *con* $Q \in O(n, \mathbb{R})$
4. $\|Q\| = \|I\| = \sqrt{n}$ *con* $Q \in O(n, \mathbb{R})$

Sappiamo che $O(n, \mathbb{R})$ ha una misura invariante μ che sia una misura sugli insiemi di Borel $B \in O(n, \mathbb{R})$ e che sia tale che

$$\mu(B) = \mu(QB) = \mu(BQ) \qquad \mu(O(n, \mathbb{R})) = 1$$

Mostriamo ora come la misura di Haar sia analoga alla densitá uniforme di probabilitá su intervalli finiti. Consideriamo i gruppi $O(1, \mathbb{R}) = O_1$ e $\mathbb{U}_1$. Poiché $O_1 = \{-1, 1\}$ si ha che la misura di Haar sará data da

$$\mu(\{-1\}) = \frac{1}{2} \qquad \mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$$

che corrisponde esattamente alla distribuzione uniforme di un lancio di una moneta. Il gruppo $\mathbb{U}_1$ sará il cerchio unitario, infatti

$$\mathbb{U}_1 = \{exp(i\theta) : \theta \in [0, 2\pi)\}$$

Qui la misura di Haar é proprio la misura di probabilitá di densitá costante $\frac{1}{2\pi}$ e quindi $\mu(U_1) = 1$

2.3.2 Il Gruppo Speciale Lineare

$$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$$

La topologia del gruppo lineare speciale reale é indotta da $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$.

Definizione 29. *La traslata sinistra di una misura di Haar destra é una misura di Haar destra. Se μ é una misura di Haar destra, allora anche*

$$A \mapsto \mu(t^{-1}B)$$

é invariante a destra. Quindi, esiste un'unica funzione Δ, detta funzione modulare, tale che, per ogni insieme di Borel B

$$\mu(t^{-1}B) = \Delta(t)\mu(B)$$

Definizione 30. *Un gruppo si dice unimodulare se e solo se la funzione modulare é identicamente 1*

Proposizione 5. *Sia $\mathcal{G}$ un gruppo topologico localmente compatto con misura di Haar μ. L'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} \Delta : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \longmapsto & \Delta(x) \end{array}$$

é un omomorfismo continuo tra $\mathcal{G}$ e il gruppo moltiplicativo $\mathbb{R}^+$. Inoltre $\forall f \in L^1(\mathcal{G}, \mu)$ si ha

$$\int_{\mathcal{G}} R_y f d\mu(x) = \Delta(y^{-1}) \int_{\mathcal{G}} f(x) d\mu(x)$$

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in \mathcal{G}$ e per ogni $A \subseteq \mathcal{G}$ μ-misurabile, si ha che:

$$\Delta(xy)\mu(A) = \mu(A * xy) = \Delta(y)\mu(A * x) = \Delta(y)\Delta(x)\mu(A)$$

Cioé Δ é un omomorfismo tra $\mathcal{G}$ e $\mathbb{R}^{>0}$; inotre si ha che $\chi_A(xy) = \chi_{Ay^{-1}}(x)$ e, quindi,

$$\int_{\mathcal{G}} \chi_A(xy) d\mu(x) = \mu(A * y^{-1}) = \Delta(y^{-1})\mu(A) = \Delta(y^{-1}) \int_{\mathcal{G}} \chi_A(x) d\mu(x)$$

Approssimando $f \in L^1(\mathcal{G}, \mu)$ con funzioni semplici si ottiene

$$\int_{\mathcal{G}} R_y f(x) d\mu(x) = \int_{\mathcal{G}} f(x) d\mu(x)$$

Infine, poiché la mappa $\left\{\begin{array}{lcc} \zeta: & \mathcal{G} & \longrightarrow & {}_c(\mathcal{G}) \\ & y & \longmapsto & R_y f(x) \end{array}\right\}$ *é continua, lo é anche la mappa* $\left\{\begin{array}{lcc} \psi: & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \longmapsto & \int R_y f(x) d\mu(x) \end{array}\right\}$. *Segue, quindi, la continuitá di* Δ

$\square$

Assumiamo ora $\mathcal{G}$ *come gruppo unimodulare, cioé le misura destra e sinistra di Haar su* $\mathcal{G}$ *risultano equivalenti, e denotiamo con* $f^- = f(x^{-1})$*, allora:*

$$\int f(x)dx = \int f(x^{-1})dx = \int f^- dx$$

Osserviamo che, se $\mathcal{G}$ *non fosse unimodulare, per l'unicitá della misura di Haar esisterebbe una funzione modulare* $\Delta : \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *che sia un omomorfismo continuo tale che*

$$\int_{\mathcal{G}} f(xa)dx = \Delta(a) \int_{\mathcal{G}} f(x)dx$$

dove

$$\int_{\mathcal{G}} f^- \Delta(x)dx = \int_{\mathcal{G}} f(x)dx$$

Un esempio di gruppo non unimodulare é dato dal gruppo della matrici triangolari, come

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

Proposizione 6. *Un gruppo topologico localmente compatto* $\mathcal{G}$ *é compatto se e solo se* $\mu(\mathcal{G}) < +\infty$*, dove* μ *é la misura di Haar su* $\mathcal{G}$

Proprietá

1. *Se* $\mathcal{G}$ *é un gruppo discreto, allora* $\Delta = 1$*, infatti la misura del conteggio é invariante sia a sinistra che a destra, in particolare la proprietá di un gruppo di essere unimodulare non implica che tale gruppo sia abeliano.*

2. *se* $\mathcal{G}$ *é compatto allora é unimodulare, infatti, sia* $A \subset \mathcal{G}$ *e sia* $y \in \mathcal{G}$*, allora*

$$\int_{\mathcal{G}} \chi_A(xy^{-1})d\mu(x) = \int_{\mathcal{G}} \chi_{Ay}(x)d\mu(x) = \mu(Ay) = \mu_y(A) = \Delta(y)\mu(A)$$

Osserviamo come se $A = \mathcal{G}$ *allora* $\mathcal{G}a = \mathcal{G}$ *e, piché* $\mu(\mathcal{G}) < \infty$ *si ha che* $\mu(\mathcal{G}) = \Delta(y)\mu(\mathcal{G})$ *e quindi* $\Delta(y) = 1$*. Per l'arbitrarietá di* y *si ha l'unimodularitá di* $\mathcal{G}$

Ricordiamo ora alcune definizioni sulle azioni di gruppi.

Definizione 31. Sia X uno spazio topologico T_2 localmente compatto e misurabile, con misura μ, e sia $\mathcal{G}$ un gruppo topologico. Affermiamo che $\mathcal{G}$ agisce su X se esiste una mappa continua, detta azione (sinistra), di $\mathcal{G}$ su X cosí definita

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathcal{G} \times X & \longrightarrow & X \\ & (g,x) & \longmapsto & \phi(g,x) = g * x \end{array}$$

tale che

1. $e * x = x \quad \forall x \in X$
2. $g_1 * (g_2 * x) = (g_1 \cdot g_2) * x \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{G} \qquad \forall x \in X$
3. μ é quasi invariante[17]

Definizione 32. L'azione di $\mathcal{G}$ viene detta ergodica se non vi sono sottoinsiemi invarianti banali di X, cioé per ogni A nella classe dei misurabili di X dove $g * y = y \quad \forall y \in A$ e $g \in \mathcal{G}$ allora si ha che $\mu(A) = 0$ oppure $\mu(Y \setminus A) = 0$

Definizione 33. Se $f \in C_c(\mathcal{G})$ definiamo

$$f^K(x) = \int_K f(xk)dk$$

Teorema 34. *(Fattorizzazione)* Se $F \in SL(n, \mathbb{R})$ allora $F = JB$ con $J \in SO(n, \mathbb{R})$ e $B \in B_n^+$ dove

$$B_n^+ = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & a_2 & x_{2,3} & \dots & x_{2,n} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} : a_i > 0, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = 1, \quad x_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

Allora $SL(n, \mathbb{R}) = SO(n, \mathbb{R}) B_n^+$

Osserviamo ora come sia possibile scrivere la decomposizione di $SL(n, \mathbb{R})$ nel modo seguente: poniamo $K = SO(n, \mathbb{R})$, allora é possibile scrivere un elemento di B_n^+ nella seguente forma:

[17] preserva la classe dei μ-misurabili, cioé $\forall A$ nella classe dei misurabili di X e $\forall g \in \mathcal{G}$ si ha che $\mu(g, A) = 0 \iff \mu(A) = 0$

$$\begin{pmatrix} a_1 & x_{1,2} & x_{1,3} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & a_2 & x_{2,3} & \dots & x_{2,n} \\ . & & & & \\ . & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 \\ . & & \\ . & & \\ 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & 1 & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ció vuol dire che $B_n^+ = AN \quad \Rightarrow \quad SL(n, \mathbb{R})$ *dove:*

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 \\ . & & \\ . & & \\ 0 & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} : a_{i,i} > 0, \quad \prod_{i=1}^{n} a_i = 1 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x_{1,2} & \dots & x_{1,n} \\ 0 & 1 & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} : x_{i,j} \in \mathbb{R} \right\}$$

(i.e. $SL(n, \mathbb{R}) = KAN$*). Da questa osservazione ricaviamo ora la seguente definizione*

Definizione 35. Siano K, A e N come sopra. Un gruppo $\mathcal{G}$ che ammette una decomposizione della forma $\mathcal{G} = KAN$ viene dette gruppo di Iwasaka.

Corollario 4. *La seguente mappa prodotto*

$$\begin{array}{rccc} \varsigma : & K \times A \times N & \longrightarrow & KAN \\ & (k, a, n) & \longmapsto & kan \end{array}$$

é un omeomorfismo

Teorema 36. Siano $P, Q \leq \mathcal{G}$ sottogruppi chiusi tali che $\mathcal{G} = PK$, e supponiamo che la mappa

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{B} : & P \times K & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & (p, k) & \longmapsto & pk \end{array}$$

sia un omemorfismo. Assumiamo poi che $\mathcal{G}$ e K siano unimodulari, allora il funzionale di Haar su $\mathcal{G}$ sará

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & C_c(\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \int_K \int_P f(pk) dp dk \end{array}$$

dove dp e dk sono, rispettivamente le misure di Haar su P e su K.

Risulta facile osservare che la misura di Haar su $\mathcal{G}$ é $d\mu = dp \times dk$, inoltre $\Delta_{\mathcal{G}}(p,k) = \Delta_P(p)\Delta_K(k)$.

Corollario 5. *Se dk da, dn sono misure di Haar su K, A, N rispettivamente, allora si ha che*

$$dx = dkdadn$$

é una misura di Haar su $SL(2,\mathbb{R})$.

Lemma 7. *Sia*

$$\rho(\alpha) = \prod_{i<j}^{+\infty} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} \qquad \alpha = Diag(a_1, \dots, a_n) \in A$$

Allora $db = \rho(\alpha)d\alpha dn$ é una misura di Haar destra su $B = AN$

Definizione 37. `Si dice che il gruppo` A `normalizza il gruppo` N `se:`

$$ana^{-1} \in \mathbb{N} \quad \forall a \in A \quad n \in \mathbb{N}$$

Teorema 38. `Siano` ν `e` μ `due misure di Haar du` $\mathcal{G}$`, allora esiste` $c > 0$ `tale che`

$$\int_{\mathcal{G}} f(x)d\nu(x) = c\int_{\mathcal{G}} f(x)d\mu(x) \qquad \forall \quad f \in C_c(\mathcal{G})$$

Sia ora $\mathcal{G}$ un gruppo topologico localmente compatto, e sia $\phi : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ un automorfismo. Se μ é la misura di Haar sinistra di $\mathcal{G}$ allora anche $(\mu \circ \phi^{-1})(E) = \mu(\phi^{-1}(E))$ é una misura invariante a sinistra. Per il teorema di cui sopra esiste $c > 0$ tale che $\mu \circ \phi^{-1} = c\mu$. Tale costante c viene detta modulo dell'automorfismo ϕ e viene denotata come $mod(\phi)$. Osserviamo come

$$\begin{array}{rccc} mod: & Aut(\mathcal{G}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \phi & \longmapsto & mod(\phi) \end{array}$$

sia un omomofismo, i.e. $mod \in Hom(Aut(\mathcal{G}), \mathbb{R}^+)$, infatti

$$(mod(\phi \circ \psi))\mu = \mu \circ \psi^{-1} \circ \phi^{-1} = (mod(\psi))\mu \circ \phi^{-1} = mod(\psi)mod(\phi)\mu$$

e quindi

$$\int_{\mathcal{G}} f(\phi^{-1}(x))d\mu(x) = (mod(\phi))^{-1} \int_{\mathcal{G}} f(y)d\mu(y)$$

dove si é effettuata la seguente sostituzione

$$y = \phi^{-1}(x) \Rightarrow d\mu(x) = d\mu(\phi(y))$$

In particolare, se consideriamo l'automorfismo interno

$$\begin{array}{rccc} \phi_a : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathcal{G} \\ & x & \longmapsto & axa^{-1} \end{array}$$

avremo che $\phi_a(x) = R_{a^{-1}}(L_a(x))$ *e quindi per ogni insieme* μ*-misurabile* E *si ha*

$$(mod(\phi_a))^{-1}\mu(E) = \mu(\phi_a(E)) = \mu(R_{a^{-1}}(L_a(E))) = \mu(aEa^{-1}) =$$

$$= \Delta(a)^{-1}\mu(aE) = \Delta(a)^{-1}(E)$$

cioé

$$mod(\phi_a) = \Delta(a)$$

Consideriamo ora il gruppo $GL_2^+(\mathbb{R})$ *delle matrici* 2×2 *con determinante positivo. Poniamo* $P = AN$ *dove*

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} : a_{1,1}a_{2,2} > 0 \right\} \qquad N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}$$

Per mostrare come la misura di Haar sia la misura di Lebesgue consideriamo un sottoinsieme $\nu \subset N$ *della seguente forma:*

$$\nu = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} : b \in B \subset \mathbb{R} \right\}$$

Se chiamiamo μ *la misura di Haar su* P *abbiamo che* $\mu(\nu) = L^1(B)$ *dove* L^1 *é esattamente la misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}$*, infatti*

$$\nu * \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{1,1}}{a_{2,2}}t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : t \in \frac{a_{1,1}}{a_{2,2}}B \right\} \longleftrightarrow \frac{a_{1,1}}{a_{2,2}}B$$

Abbiamo quindi

$$\frac{a_{1,1}}{a_{2,2}}L^1(B) = L^1\left(\frac{a_{1,1}}{a_{2,2}}B\right) = \mu\left(\nu \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \Delta\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}\right)\mu(\nu) =$$

$$= \Delta\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) L^1(B)$$

Scegliendo B *in modo che* $L^1(B) < +\infty$ *si ha che:*

$$\Delta\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 \\ 0 & a_{2,2} \end{pmatrix}\right) = \frac{a_{1,1}}{a_{2,2}}$$

Nel caso di $SL(2,\mathbb{R})$ *avremo che* $a_{2,2} = a_{1,1}^{-1}$. *Posto*

$$h_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$$

si ha

$$\alpha(a) = mod(\phi_{h_a}) = a^2$$

2.3.3 Il Semipiano di Poincaré

Definizione 39. *`Definiamo il sempiano di Poincaré nel seguente modo:`*

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$$

Vogliamo ora trovare una relazione tra il semipiano di Poincaré e il gruppo $SL(2,\mathbb{R})$. *Ricordiamo, innanzitutto, che*

$$SL(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : det(A) = 1 \right\}$$

allora si vede subito come, per ogni matrice di $SL(2,\mathbb{R})$ *l'applicazione*

$$f : \xi \longrightarrow \frac{a\xi + b}{c\xi + d}$$

definisce un automorfismo olomorfo di $\mathbb{H}$ *e che l'applicazione*

$$\begin{array}{cccc} g: & SL(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & Aut(\mathbb{H}) \\ & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & f \end{array}$$

é un omomorfismo suriettivo di $SL(2,\mathbb{R})$ *su* $Aut(\mathbb{H})$, *il cui nucleo corrisponde esattamente al centro di* $SL(2,\mathbb{R})$, *cioé*

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Osserviamo, ora, come si abbia la seguente azione su $\mathbb{H}$

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{Z}: & GL^+(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & (\tilde{A}, z) & \longmapsto & \tilde{A}\cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

che manda $\mathbb{H}$ *in* $\mathbb{H}$*, dove* $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *e dove valga l'associativitá*

$$\tilde{A}\cdot(B\cdot z) = (\tilde{A}B)\cdot z$$

Lemma 8. *La misura* $d\mu = \frac{dxdy}{y^2}$ *su* $\mathbb{H}$ *é invariante sotto l'azione di* $SL(2,\mathbb{R})$

Dimostrazione. Sia $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ e sia $\mathcal{T}_{\tilde{A}}$ la trasformazione lineare fratta associata ad $\tilde{A}$ vista come applicazione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, allora si ha

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{T}_{\tilde{A}}: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \left(\frac{ac(x^2+y^2)+(ad+bc)x+bd}{(cx+d)^2+c^2y^2}, \frac{y}{(cx+d)^2+c^2y^2}\right) \end{array}$$

Il determinante dello jacobiano in $z = x+iy$ risulta, quindi, essere $|cz+d|^{-4}$. Dalla formula del cambio di variabili si avrá

$$\int_{\mathbb{H}} f(\tilde{A}^{-1}\cdot z)\frac{dxdy}{y^2} = \int_{\mathbb{H}} f(w)\frac{1}{|cz+d|^4}\frac{|cz+d|^4 d\xi d\eta}{\eta^2} = \int_{\mathbb{H}} f(w)\frac{d\xi d\eta}{\eta^2}$$

dove si é effettuata la seguente sostituzione

$$w = \xi + i\eta = \tilde{A}^{-1}\cdot z$$

□

Definizione 40. Il gruppo di isotropia di $z \in \mathbb{H}$ é il gruppo moltiplicativo

$$I_z = \{M \in SL(2,\mathbb{R}) : M\cdot z = z\}$$

Proprietá

1. *Consideriamo l'i-esimo gruppo di isotropia* I_i*, allora si ha che*

$$\frac{ai+b}{ci+d} = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = c^2+d^2 = ad-bc = 1$$

E quindi risulta naturale identificare l'i-esimo gruppo di isotropia nel seguente modo

$$I_i = \left\{ M = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi) \right\} \equiv SO(2,\mathbb{R})$$

2. La mappa

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{J}: & SL(2,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & M & \longmapsto & M \cdot i \end{array}$$

Induce la seguente corrispondeza biunivoca

$$\begin{array}{cccc} \mathfrak{E}: & M \cdot N & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \longmapsto & x + ia^2 \end{array}$$

Da ció possiamo dedurre la misura di Haar su $\mathcal{G}/K$ *(*$K = SO(n,\mathbb{R})$*), infatti, posto* $y = a^2$*, sia* da *la misura di Lebesgue su* $\mathbb{R}$*, allora*

$$dy = 2ada$$

e quindi

$$\frac{dxdy}{y^2} = \frac{2adxda}{a^4} = 2\alpha(a)^{-1}dxd^\star(a)$$

dove $d^\star(a) = \frac{da}{a}$*. Se* a *rappresenta la variabile* $A \in SL(2,\mathbb{R})$ *allora si ha che*

$$\begin{array}{cccc} q: & \mathcal{G}/K & \longrightarrow & \mathbb{H} \\ & 2\alpha(a)^{-1}dnd^\star(a) & \longmapsto & \frac{dxdy}{y^2} \end{array}$$

Dove $\mathcal{G}/K = SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R})$

3 Gruppi di Lie

Vediamo ora come definire una misura di Haar sui gruppi di Lie che risultano essere particolari gruppi localmente compatti.

Definizione 41. *Un gruppo di Lie* $\mathcal{G}$ *é una varietá differenziabile* C^∞ *munita di una struttura di gruppo tale che le operazioni*

1. $(g,h) \longmapsto gh$
2. $g \longmapsto g^{-1}$

siano C^∞

Definizione 42. *Un'algebra di Lie* $\mathfrak{G}$ *su un campo* $\mathbb{K}$ *é uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *munito di una operazione bilineare* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{G} \times \mathfrak{G} \longmapsto \mathfrak{G}$ *tale che:*

1. $[X,Y] = -[Y,X] \quad \forall \quad X,Y \in \mathfrak{G}$

2. $[X,[Y,Z]] = [[X,Y],Z] + [Y,[X,Z]] \qquad \forall \quad X,Y,Z \in \mathfrak{G}$

Il piú ovvio gruppo di Lie risulta essere $\mathbb{R}$ dotato dell'operazione addizione. Elenchiamo, ora, alcuni gruppi di Lie:

- $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) : AA^t = 1\}$
- $SO(n,\mathbb{R}) = \{A \in O(n,\mathbb{R}) : det(A) = 1\}$
- $U(n,\mathbb{C}) = \left\{A \in GL(n,\mathbb{C}) : A\overline{A}^t = 1\right\}$
- $SU(n,\mathbb{C}) = \{A \in U(n,\mathbb{C}) : det(A) = 1\}$

Risulta ovvio il fatto che $GL(n,\mathbb{R})$ e $GL(n,\mathbb{C})$ siano gruppi di Lie, in quanto hanno coordinate globali in cui la moltiplicazione é data da polinomi mentre l'inverso da funzioni razionali il cui denominatore é esattamente il determinante.

Definizione 43. *Sia $\mathfrak{G}$ un'algebra di Lie e sia V uno spazio vettoriale, allora un omomorfismo $\pi : \mathfrak{G} \longrightarrow End(V)$ (con $End(V)$ visto come un'algebra di Lie) si dice una rappresentazione di $\mathfrak{G}$ su V e V viene detto $\mathfrak{G}$-modulo rispetto all'azione π*

Sia $\mathcal{G}$ un gruppo di Lie e sia $\mathfrak{X}(\mathcal{G})$ il modulo su $C^\infty(\mathcal{G})$ dei campi vettoriali su $\mathcal{G}$. Sia $l_g : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ la traslazione a sinistra di $g \in \mathcal{G}$, cioé $l_g(h) = gh$. Un campo vettoriale $K \in \mathfrak{X}(\mathcal{G})$ si dice invariante a sinistra su $\mathcal{G}$ se per ogni $g, h \in \mathcal{G}$ risulta

$$(l_g)_{*h} K_h = K_{gh}$$

dove $(l_g)_{*h} : T_{h(\mathcal{G})} \longrightarrow T_h(\mathcal{G})$ denota il differenziale di l_g in h e $T_h(\mathcal{G})$ é lo spazio tangente a $\mathcal{G}$ in h. L'insieme dei campi invarianti a sinistra su $\mathcal{G}$ verrá cosí indicato: $\mathfrak{L}(\mathcal{G})$

Proposizione 7. *Sia $\mathcal{G}$ un gruppo di Lie e sia $\mathfrak{L}(\mathcal{G})$ l'insieme dei campi invarianti a sinistra su $\mathcal{G}$. Allora:*

1. *$\mathfrak{L}(\mathcal{G})$ é uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e la mappa $\left\{\begin{array}{lccc} q: & \mathfrak{L}(\mathcal{G}) & \longrightarrow & T_e(\mathcal{G}) \\ & K & \longmapsto & K_e \end{array}\right\}$ é un isomorfismo di spazi vettoriali tra $\mathfrak{L}(\mathcal{G})$ e lo spazio tangente dell'identita $e \in \mathcal{G}$. Di conseguenza $dim(\mathfrak{L}(\mathcal{G})) = dim(T_e(\mathcal{G})) = dim(\mathcal{G})$*

2. *Il commutatore $[X,Y] = X \circ Y - Y \circ X$ di due campi invarianti a sinistra é ancora un campo invariante a sinistra*

Notiamo ora come sia possibile sostituire i campi vettoriali invarianti a sinistra con le forme invarianti a sinistra. Come, tempo fa, avevamo definito il piano tangente in un punto, definiamo ora una forma in un punto, ad esempio nel punto 1, che determini in modo univoco una forma invariante a sinistra. Abbiamo, quindi, che, per ogni k lo spazio vettoriale $\Lambda^k \mathfrak{G}^\star$ si identifica con lo spazio delle forme esterne di grado k invarianti a sinistra.

Proposizione 8. L'algebra esterna $\Lambda\mathfrak{G}^\star$ ha una struttura di algebra differenziale graduata

Dimostrazione. Per dimostrare la proposizione basta fare vedere che valgano:

1. Il differenziale $-d : \mathfrak{G}^\star \longrightarrow \mathfrak{G}^\star \wedge \mathfrak{G}^\star$ é il duale del prodotto di Lie su $\mathfrak{G}^\star$

2. Vale sempre la seguente condizione sul differenziale: $d^2 = 0$

La prima condizione si dimostra applicando la definizione, infatti, dati due campi vettoriali X e Y ed una forma ψ si ha

$$\langle\psi|[X,Y]\rangle = -\langle d\psi|X \wedge Y\rangle + X(\langle\phi|Y\rangle) - Y(\langle\psi|X\rangle)$$

se ψ, X, Y sono invarianti a sinistra allora anche $\langle\phi|Y\rangle$ e $\langle\psi|X\rangle$ sono invarianti a sinistra e quindi:

$$X(\langle\phi|Y\rangle) = Y(\langle\psi|X\rangle) = 0$$

allora:

$$\langle\psi|[X,Y]\rangle = \langle -d\psi|X \wedge Y\rangle$$

La seconda condizione di dimostra ricordando che, dato uno spazio vettoriale V ed una applicazione $d : V \longrightarrow V \wedge V$ esiste un'unica estensione di d dell'algebra ΛV □

3.1 Algebre Multilineari e Forme Differenziali

3.1.1 Applicazioni Multilineari

Definizione 44. Siano $V_i, \ldots, V_n, W$ spazi vettoriali. Una applicazione

$$f : V_i, \ldots, V_n \longrightarrow W$$

si dice multilineare se é lineare in ogni variabile, Ció vuol dire che preso comunque un intero $i = 1, \ldots, n$ e fissato comunque dei vettori $v_j \in V_i$, per ogni $i \neq j$, si ha che

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{f}: & V_i & \longrightarrow & W \\ & v & \longmapsto & f(v_i, \dots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \dots, v_n) \end{array}$$

é **lineare.**

Osservazione 45. *Se $n = 2$ otteniamo un'applicazione bilineare*

Notazione: *Indichiamo, da ora, con $\mathcal{ML}(V_1, \dots, V_n; W)$ lo spazio vettoriale delle applicazioni multilineari $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$*

Proprietá

1. *Siano $g : Z \longrightarrow Z'$ un'applicazione linerare e $f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow Z$ una mappa multilineare. Allora*

$$g \circ f : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow Z'$$

   é multilineare

2. *Siano $g_i : V_i \longrightarrow W_i$, per $i = 1, \dots, n$, applicazioni lineari e sia $f : W_1 \times \cdots \times W_n \longrightarrow Z$ un'applicazione multilineare. Allora*

$$\begin{array}{rccc} F: & V_1 \times \cdots \times V_n & \longrightarrow & Z \\ & (v_1, \dots, v_n) & \longmapsto & f(g_1(v_1), \dots, g_n(v_n)) \end{array}$$

   é multilineare

3. *Siano $f_i : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W_i$, per $i = 1, \dots, m$, applicazioni e sia $F : V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W_1 \times \cdots \times W_m$ un'altra applicazione. Allora F é multilineare se e solo se f_i é multilineare per $i = 1, \dots, m$*

4. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, allora il* natural pairing *di uno spazio vettoriale V nel suo duale $V^\star$ cosí definito*

$$\begin{array}{rccc} \langle \cdot, \cdot \rangle : & V \times V^\star & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & \langle v, w^\star \rangle & \longmapsto & w^\star(v) \end{array}$$

   é bilineare

Corollario 6. *Siano $V_1, \dots, V_n, W$ spazi vettoriali, allora*

$$dim(\mathcal{ML}(V_1, \dots, V_n; W)) = dim(W) \prod_{i=1}^{n} dim(V_i)$$

Definizione 46. *Siano V e W due spazi vettoriali e sia $f : V_1 \cdots \times V_q \longrightarrow W$ una mappa multilineare. Allora f si dice alternante se per ogni n-upla $(v_1, \ldots, v_q) \in V_1 \times \cdots \times V_q$ e per ogni σ una permutazione di $(1, \ldots, q)$ si ha*

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = sgn(\sigma) f(v_1, \ldots, v_q)$$

Notazione: *Indichiamo, da ora, con $Alt^q(V, W)$ l'insieme delle mappe multilineari alternanti*

Osservazione 47. *Osserviamo come siano veri i seguenti fatti:*

1. $Alt^0(V, \mathbb{K}) = \mathbb{K}$
2. $Alt^1(V, W) = Hom(V, W)$

Proposizione 9. *Sia $f \in Alt^q(V, W)$. Allora se $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti si ha che*

$$f(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

Proposizione 10. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia q un intero positivo. Allora si ha che*

$$dim(Alt^q(V)) = \begin{cases} \binom{n}{q} & q \leq n \\ 0 & q < n \end{cases}$$

Definizione 48. *Definiamo come potenza q-esima di V il seguente oggetto*

$$\Lambda^q(V) = Alt^q(V^\star, \mathbb{K})$$

3.1.2 K-Algebre

Definizione 49. *Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ dotato di una applicazione bilineare $f : V \times V \longrightarrow V$ viene detto $\mathbb{K}$-algebra e viene denotato con (V, f)*

Definizione 50. *Sia (V, f) una $\mathbb{K}$-algebra e siano V_i sottospazi vettoriali di V tali che*

$$V = \bigoplus_{i=0}^{\infty} V_i \qquad f(V_i, V_j) \subset A_{i+j} \qquad i, j = 0, 1, 2, \ldots$$

Diremo che V é una $\mathbb{K}$-algebra graduata

Definizione 51. *Uno spazio vettoriale V su un campo $\mathbb{K}$ dotato di una applicazione bilinerare*

$$\begin{array}{rccc} f: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (x,y) & \longmapsto & [x,y] \end{array}$$

tale che:

1. $[x,x] = 0$ *per ogni* $x \in V$
2. $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]] = 0$ *per ogni* $x,y,z \in V$ *(Identitá di Jacobi)*

é detta algebra di Lie

Osservazione 52. *Se la caratteristica del campo $\mathbb{K}$ é diversa da 2 la prima condizione della definizione equivale a $[x,y] = -[y,x]$*

3.1.3 Forme Differenziali

Definizione 53. *Sia U un aperto di $\mathbb{R}^n$. Le applicazioni $\eta \in C^\infty(U, \Lambda^q\mathbb{R}^n)$ si dicono forme differenziali alternate omogenee di grao q a coefficienti C^∞ in U*

Indichiamo ora con dx^i la forma lineare su $\mathbb{R}^n$ cosí definita

$$dx^i(x) = x^i \qquad \forall \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Osservazione 54. *Osserviamo come le forme $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$ con $1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n$ costituiscano una base di $\Lambda^q\mathbb{R}^n$*

Definizione 55. *Una forma differenziale $\eta \in C^\infty(U, \Lambda^q\mathbb{R}^n)$ si scrive in modo unico come*

$$\sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_q \leq n} \eta_{i_1,\dots,i_q} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_q}$$

dove

$$\eta_{i_1,\dots,i_q} = (x)(e_{i_1}, \dots, e_{i_q}) \in C^\infty(U)$$

3.2 La misura di Haar

La misura di Haar su un gruppo di Lie va studiata tramite le forme differenziali. Fissata una base $\{e_1, \dots, e_n\}$ abbiamo vista come costruire un campo invariante K_i a sinistra per ogni e_i. Prendiamo ora punto per punto la base duale ai K_i ottenendo n forme differenziali lineari K^i invarianti a sinistra.
Se $g \in \mathcal{G}$ e $L_g : x \longrightarrow gx$ sappiamo che $(dL_g \circ K_i) = K_i$ allora:

$$\langle dL_g \circ K_i = K_i | K_j \rangle = \langle K_i | L_g^\star K_i \rangle = \delta_{i,j} \qquad L_g^\star = K^i$$

Il prodotto $K^1 \wedge K^2 \wedge \cdots \wedge K^n$ *fonisce dunque una forma differenziale* ψ *di grado massimo non nulla ed invariante a sinistra (i.e.* $L_g^\star(\psi) = \psi$*) che permette di difinire una misura di Haar invariante a sinistra:*

$$\int f(x)\psi = \int L_g^\star(f(x)\psi) = \int f(gx)\psi$$

Una diversa base che preservi l'orientazione induce un fattore di riscalamento pari al determinante del cambiamento di basi.

Come nell'esempio 2 *del paragrafo* 2.1 *consideriamo* $\mathcal{G} = GL(n, \mathbb{R})$ *in coordinate* $X = (x_{i,j})$*, dove* $det(X)$ *indica il determinante della matrice delle coordinate. Consideriamo ora la forma* $\psi(X) = \Lambda_{i,j} dx_{i,j}$ *che dá la misura di Lebesgue. Verifichiamo ora che:*

$$|det(X)|^{-n} \Lambda_{i,j} dx_{i,j}$$

é una misura invariante a sinsitra. Sia $A \in GL(n, \mathbb{R})$*, se moltiplichiamo tutto per* A *otteniamo una trasformazione lineare sullo spazio delle matrici il cui determinante dello jacobiano é* $det(A)^n$*. Per il teorema di Fubini abbiamo che:*

$$\int \frac{f(X)}{|det(X)|^n}\psi(X) = \int \frac{f(AX)}{[det(AX)]^n}\psi(AX) =$$
$$= \int \frac{f(AX)}{|det(AX)|^n}|det(AX)|^n\psi(X) = \int \frac{f(AX)}{|det(X)|^n}\psi(X)$$

Osserviamo come per $\mathcal{G} = GL(n, \mathbb{C})$ *valga una formula simile in cui la misura di Lebesgue é data da* $|det(X)|^{-2n}$

Definizione 56. `Un gruppo di Lie` $\mathcal{G}$ `si dice unimodulare se una misura di Haar sinistra é anche destra`

Corollario 7. *I gruppi compatti sono unimodulari*

Osserviamo, ora, come la piú semplice classe di gruppi non unimodulari sia quella dei gruppi delle matrici triangolari superiori. Sia $\mathcal{Q}$ *il gruppo delle matrici triangolari superiori, scirviamo allora un elemento di* $A \in \mathcal{Q}$ *come* $A = DI$ *dove* D *é la diagonale di elementi* a_i *mentre* I *la matrice identitá. L'esempio piú semplice é costituito da dal gruppo delle trasformazioni affini della retta:*

$$\mathfrak{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Infatti, presa una generica matrice $A \in \mathfrak{A}$ *si ha che:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+b \\ 1 \end{pmatrix}$$

In questo caso le misure invarianti a destra e a sinistra sono rispettivamente:

$$\frac{da \wedge db}{a^2} \qquad \frac{da \wedge db}{a}$$

Un importante risultato della geometria integrale, noto come teorema di Hadwiger, stabilisce che lo spazio delle funzioni di insieme, non necessariamente non negative, invarianti per traslazione e finitamente additive, che sono definite nell'insieme delle unioni finite di insiemi compatti convessi in $\mathbb{R}^n$*, consiste (a meno di multipli scalari) di una misura che risulti omogenea*[18] *di grado* $k = 1, \dots, n$ *e di combinazioni lineari di tali misure.*

[18] Riscalando di un qualsiasi fattore $c > 0$ tutti gli insiemi, si moltiplica la misura di insieme per c^k. La misura omogenea di grado n é l'ordinario volume n-dimensionale, quella omogenea di grado $n-1$ é il volume di superficie, quella omogenea di grado 1 é la funzione chiamata ampiezza media mentre la misura omogenea di grado 0 é la nota caratteristica di Eulero.