AM110 - A.A. 2013/14

ALFONSO SORRENTINO

Esercizi sulle Funzioni

Esercizio svolto 1. Trovare i domini di definizione delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$;

b) $g(x) = \sqrt{\log\left(\frac{x-1}{x}\right)}$;

c) $h(x) = \frac{x^{\sin x}+1}{e^{\sin x}-1}$.

Soluzione.

a) La funzione $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}} + \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$ è ben definita per:

$$\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \Big(2k\pi, (2k+1/2), \pi\Big).$$

b) La funzione $g(x) = \log\left(\frac{x-1}{x}\right)$ è ben definita per:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x} > 0 \\ \log\left(\frac{x-1}{x}\right) \geq 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{x-1}{x} \geq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x < 0.$$

c) La funzione $h(x) = \frac{x^{\sin x}+1}{e^{\sin x}-1}$ è ben definita per:

$$\begin{cases} x > 0 \\ e^{\sin x} - 1 \neq 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in (0, +\infty) \setminus \{k\pi :\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Esercizio svolto 2. Trovare il dominio ed il codominio delle seguenti funzioni. Studiarne l'invertibilità.

a) $f(x) = \log\left[\arcsin(x^2-3)\right]$;

b) $g(x) = \tan\left[\arccos(\frac{x}{x+2})\right]$.

Soluzione.

a) Cominciamo col calcolare il dominio di definizione della funzione $f(x) = \log\big[\arcsin(x^2-3)\big]$. La funzione è ben definita per:

$$\begin{cases} (x^2-3) \in [-1,1] \\ \arcsin(x^2-3) > 0 \end{cases} \iff 0 < x^2 - 3 \leq 1 \iff 3 < x^2 \leq 4.$$

Quindi il dominio della funzione è $\mathbb{D}(f) = \Big[-2, -\sqrt{3}\Big) \cup \Big(\sqrt{3}, 2\Big]$.

Osserviamo inoltre che:
- la funzione è pari: $f(x) = f(-x)$;
- la funzione è crescente in $\Big(\sqrt{3}, 2\Big]$: infatti, è composizione di funzioni crescenti in tale regione;
- usando la parità della funzione si può dedurre che la funzione è decrescente in $\Big[-2, -\sqrt{3}\Big)$;
- la funzione non è limitata inferiormente in quanto

$$\lim_{x\to\pm\sqrt{3}} f(x) = -\infty;$$

- la funzione ha due massimi globali in $x = \pm 2$, dove $f(\pm 2) = \log\frac{\pi}{2}$.

In conclusione, il codominio della funzione è $f(\mathbb{R}) = \Big(-\infty, \log\frac{\pi}{2}\Big]$.

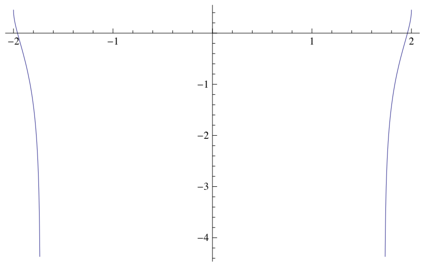

Figure 1

La funzione non è chiaramente iniettiva (in quanto pari), quindi non è globalmente invertibile. Si possono però trovare due inverse locali, rispettivamente in $\Big[-2, -\sqrt{3}\Big)$ ed in $\Big(\sqrt{3}, 2\Big]$. Infatti:

$$\begin{aligned} y = \log\big[\arcsin(x^2-3)\big] &\iff e^y = \arcsin(x^2-3) \\ &\iff \sin e^y = x^2 - 3 \\ &\iff x = \pm\sqrt{3 + \sin e^y}. \end{aligned}$$

b) Calcoliamo il dominio di definizione della funzione $g(x) = \tan\big[\arccos(\frac{x}{x+2})\big]$. La funzione è ben definita per:

$$\begin{cases} \frac{x}{x+2} \in [-1,1] \\ \arccos\left(\frac{x}{x+2}\right) \neq \frac{\pi}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{x}{x+2} \in [-1,1] \\ x \neq 0 \end{cases}$$

Si verifica facilmente che il dominio della funzione è dato quindi da $\mathbb{D}(g) = [-1, 0) \cup (0, +\infty)$.

Osserviamo inoltre che:
– la funzione è strettamente negativa per $x \in (-1, 0)$ e si annulla solamente in $x = -1$;
– la funzione è strettamente positiva per $x > 0$;
– la funzione è decrescente in $[-1, 0)$ ed in $(0, +\infty)$.
– la funzione non è limitata inferiormente, né superiormente:

$$\lim_{x \to 0^\pm} g(x) = \pm\infty.$$

In conclusione, il codominio della funzione è $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ e la funzione è iniettiva.

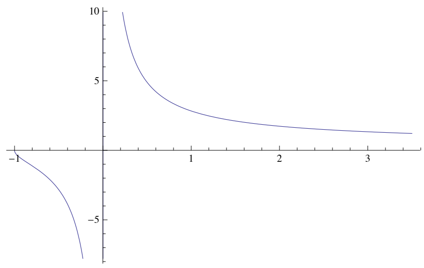

Figure 2

Troviamo la funzione inversa $y = g^{-1}(x)$. Usando il fatto che $\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, si ottiene:

$$\begin{aligned} y^2 &= \tan^2\left[\arccos(\frac{x}{x+2})\right] = \frac{1}{\cos^2\left[\arccos(\frac{x}{x+2})\right]} - 1 = \\ &= \frac{(x+2)^2}{x^2} - 1 = \frac{4x+4}{x^2}. \end{aligned}$$

Quindi $x = g^{-1}(y)$ è soluzione dell'equazione $y^2x^2 - 4x - 4 = 0$, che ha soluzioni:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4+4y^2}}{y^2} = \frac{2}{y^2}\Big(1 \pm \sqrt{1+y^2}\Big).$$

Poiché $g^{-1}(y) > 0$ per $y > 0$, $g^{-1}(y) < 0$ per $y < 0$ e $g^{-1}(0) = -1$, possiamo concludere:

$$x = g^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{2}{y^2}\big(1 + \sqrt{1+y^2}\big) & \text{per } y > 0 \\ -1 & \text{per } y = 0 \\ \frac{2}{y^2}\big(1 - \sqrt{1+y^2}\big) & \text{per } y < 0. \end{cases}$$

Esercizio svolto 3. Dire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la funzione $f_a(x) = a|x| + x$ è invertibile.

Soluzione. Cominciamo con l'osservare che per $a \in \mathbb{R}$:

$$f_a(x) = \begin{cases} (a+1)\,x & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \\ (1-a)\,x & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

- Se $a = -1$, la funzione non è invertibile. Infatti, $f_{-1}(x) \equiv 0$ per $x \geq 0$.

- Se $a = 1$, la funzione non è invertibile. Infatti, $f_1(x) \equiv 0$ per $x \leq 0$.
- Se $a > 1$, la funzione non è iniettiva. Infatti, per ogni $y > 0$ si ha:
$$f_a^{-1}(y) = \left\{ \frac{y}{a+1}, \frac{y}{1-a} \right\}.$$
In particolare, il suo grafico è della seguente forma:

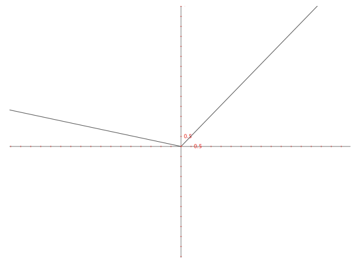

Figure 3

- Se $a < -1$, la funzione non è iniettiva. Infatti, per ogni $y < 0$ si ha:
$$f_a^{-1}(y) = \left\{ \frac{y}{a+1}, \frac{y}{1-a} \right\}.$$
In particolare, il suo grafico è della seguente forma:

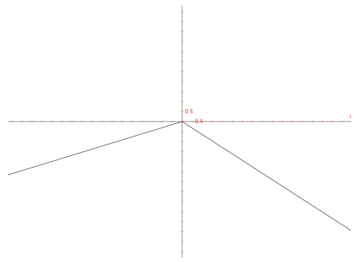

Figure 4

- Se $-1 < a < 1$, la funzione è iniettiva e
$$f_a^{-1}(y) = \begin{cases} \frac{y}{1+a} & \text{per } y > 0 \\ 0 & \text{per } y = 0 \\ \frac{y}{1-a} & \text{per } y < 0. \end{cases}$$
In particolare, il suo grafico è della seguente forma:

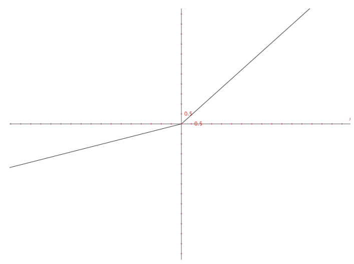

Figure 5

Esercizio aggiuntivo 1. Si consideri la seguente funzione:

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} (\alpha-1)x^2+2 & \text{per } x>0 \\ x^4-\alpha & \text{per } x\le 0. \end{cases}$$

1. Per quali valor di $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione f_α è invertibile?
2. Per quali valor di $\alpha \in \mathbb{R}$, $f_\alpha(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$?
3. Per $\alpha = -4$, determinare il dominio, il codominio e l'inversa di f_α.

Esercizio svolto 4. Calcolare i seguenti limitii:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$;

b) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x})-1}{\arctan x^2}$;

c) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\tan x}$;

d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 x)^{\tan^2 x}$;

e) $\lim_{x\to \infty} \frac{\log(3+\sin x)}{x^3}$;

f) $\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x}$;

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x}$;

h) $\lim_{x\to +\infty} \left[xe^x \sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)\right]$;

i) $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2\sin x+\sin^2 x}{x^4+x^3+x\sin x}$;

l) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\log\sin x}{\log x}$;

m) $\lim_{x\to 0}(\sin x^2)^{\frac{1}{\log x^2}}$;

n) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x\cdot(e^{\cos x}-1))$.

Soluzione.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\tan x\,(1-\cos x)}{x^3} = \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\cdot\frac{(1-\cos x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\cos(e^x-e^{-x})-1}{\arctan x^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{[\cos(e^x-e^{-x})-1]}{(e^x-e^{-x})^2}\cdot\frac{(e^x-e^{-x})^2}{\arctan x^2}\right)=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\arctan x^2}\right)=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}e^{-2x}\left(\frac{e^{2x}-1}{x}\right)^2=\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}4\cdot\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\right)^2=\\
&= -2.
\end{aligned}$$

c)

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0}e^{\tan x\cdot\log(1+x)}=1.$$

d)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos^2 x)^{\tan^2 x} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\cos^x}}\right]^{\cos^2 x\cdot\tan^2 x}=\\
&= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+\cos^2 x\right)^{\frac{1}{\cos^x}}\right]^{\sin^2 x}=e.
\end{aligned}$$

e)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(3+\sin x)}{x^3} = 0.$$

f)

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1.$$

g)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1-\tan x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{2\tan x}{\sin x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}\right)}=\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{2}{\cos x\left(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1-\tan x}\right)}=1.
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left[xe^x\sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)\right] &= \lim_{x\to+\infty}\left[xe^x\frac{\sin\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)}{e^{-x}\sin\frac{2}{x}}\cdot\left(e^{-x}\sin\frac{2}{x}\right)\right]=\\
&= \lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{2}{x}=\\
&= \lim_{x\to+\infty}2\cdot\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}=2.
\end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + x^2 \sin x + \sin^2 x}{x^4 + x^3 + x \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \left(x + \sin x + \frac{\sin^2 x}{x^2}\right)}{x^2 \left(x^2 + x + \frac{\sin x}{x}\right)} = \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x + \sin x + \frac{\sin^2 x}{x^2}}{x^2 + x + \frac{\sin x}{x}} = 1.
\end{aligned}$$

l)

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log \sin x}{\log x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\log \sin x}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{\log x}\right) = 1.$$

m)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} (\sin x^2)^{\frac{1}{\log x^2}} &= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\log x^2} \cdot \log(\sin x^2)} = \\
&= \lim_{x\to 0} e^{\frac{x^2}{\log x^2} \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{\log(\sin x^2)}{\sin x^2}} = e.
\end{aligned}$$

n)

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x \cdot (e^{\cos x} - 1)) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\sin x \cdot \frac{e^{\cos x} - 1}{\cos x}\right) = 1.$$

Esercizio svolto 5 (Funzioni iperboliche). Si definiscano le seguenti funzioni iperboliche:

- il *Seno iperbolico*:
$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
- il *Coseno iperbolico*:
$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

i) Dimostrare che $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.
ii) Trovare il dominio e il codominio di queste funzioni. Studiarne il segno, le eventuali simmetrie, la crescenza o la decrescenza, e disegnare un grafico approssimativo.
iii) Trovare le rispettive funzioni inverse (dove definite). Si possono esprimere attraverso funzioni elementari note?

Soluzione.

i) Si verifica facilmente che:

$$\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \\
&= \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2}{4} - \frac{e^{2x} + e^{-2x} - 2}{4} = \\
&= 1.
\end{aligned}$$

ii) Entrambe le funzioni sono chiaramente definite su tutto $\mathbb{R}$; quindi il dominio è tutto l'asse reale.

– Seno iperbolico:

* È una funzione dispari; infatti:
$$\sinh(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$
* Poiché $e^x > e^{-x}$ per ogni $x > 0$, allora $\sinh x > 0$ per ogni $x > 0$. Trattandosi di una funzione dispari, $\sinh x < 0$ per $x < 0$. Inoltre, $\sinh 0 = 0$.
* Si verifica facilmente che $\sinh x$ è una funzione crescente. Infatti, e^x è crescente e e^{-x} decrescente (quindi $-e^{-x}$ è crescente).
* Calcoliamo i limiti per x che tende a infinito:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = \pm\infty.$$
* Il codominio è quindi $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
* La funzione $\sinh x$ è globalmente iniettiva e quindi globalmente invertibile.

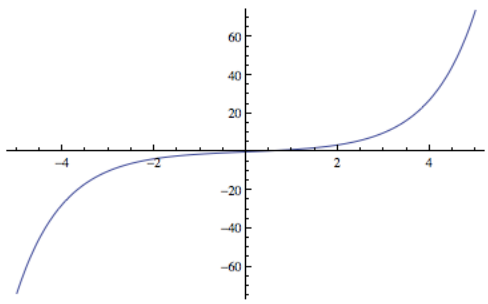

FIGURE 6

– Coseno iperbolico:

* È una funzione pari; infatti:
$$\cosh(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$
* Poiché $e^x > 0$ per ogni x, allora $\cosh x > 0$ per ogni x.
* Si verifica che $\cosh x$ è una funzione decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$. Poiché si tratta di una funzione pari, è sufficiente verificare che è crescente per $x > 0$.
Osserviamo, infatti, che per il punto i), $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$. Poiché $\sinh x$ è una funzione crescente per $x > 0$, possiamo concludere che anche $\cosh x$ lo è.
* Calcoliamo i limiti per x che tende a infinito:
$$\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = +\infty.$$
* La funzione $\cosh x$ ha quindi un minimo per $x = 0$, dove $\cosh 0 = 1$. Quindi il codominio è $\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty)$.

∗ La funzione $\cosh x$ non è globalmente iniettiva; infatti per ogni $y_0 > 1$ esistono esattamente due valori $-x_0 < 0 < x_0$ tale che $\cosh(x_0) = \cosh(-x_0) = y_0$. Quindi non è globalmente invertibile, ma ha due inverse locali: una a valori in $[0, +\infty)$ ed una a valori in $(-\infty, 0]$. Queste due inverse sono una l'opposto dell'altra (vista la parità della funzione).

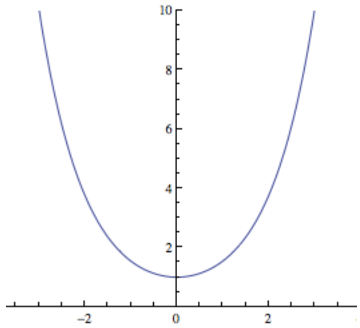

Figure 7

iii) Trovare le rispettive funzioni inverse (dove definite). Si possono esprimere attraverso funzioni elementari note?

– Arcoseno iperbolico.

Abbiamo visto nel punto ii) che la funzione seno iperbolico ammette un'inversa globale, che chiameremo *arcoseno iperbolico*. In particolare:

$$\text{arcsinh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ed il suo grafico avrà la seguente forma (si può ottenere, ad esempio, riflettendo il grafico del seno iperbolico rispetto alla bisettrice $y = x$):

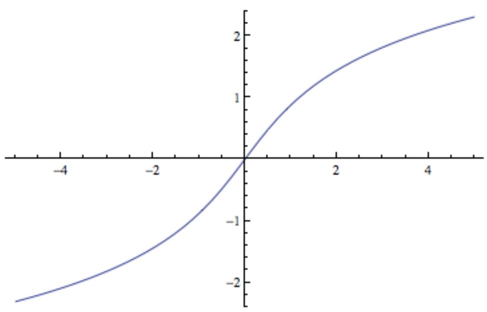

Figure 8

Cerchiamo ora di esprimere $x = \text{arcsinh}\, \mathrm{y}$ attraverso funzioni elementari noti. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} y &= \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \\ &= \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{2} = \\ &= \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}, \end{aligned}$$

che è equivalente a

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

Risolvendo quest'equazione di secondo grado in e^x, otteniamo due soluzioni: $y \pm \sqrt{y^2+1}$. Poiché e^x è sempre positivo, dobbiamo scegliere l'unica soluzione positiva:

$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}.$$

Quindi:

$$x = \operatorname{arcsinh} \mathrm{y} = \log\left(\mathrm{y} + \sqrt{\mathrm{y}^2+1}\right).$$

– Arcocoseno iperbolico.

Abbiamo visto nel punto ii) che la funzione coseno iperbolico non ammette un'inversa globale, ma due inverse locali una a valori in $[0,+\infty)$, che denoteremo $\operatorname{arccosh}_+$, ed una a valori in $(-\infty,0]$, che denoteremo $\operatorname{arccosh}_-$. In particolare:

$$\operatorname{arccosh}_+ : [1,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

e

$$\operatorname{arccosh}_- : [1,+\infty) \longrightarrow (-\infty,0].$$

Poiché la funzione cosh è pari, segue facilmente che per ogni $y \geq 1$ si ha:

$$\operatorname{arccosh}_+(\mathrm{y}) = -\operatorname{arccosh}_-(\mathrm{y}).$$

Il grafico di $\operatorname{arccosh}_+$ avrà la seguente forma (si può ottenere, ad esempio, riflettendo il grafico del coseno iperbolico – ristretto al semiasse positivo – rispetto alla bisettrice $y = x$); quello di $\operatorname{arccosh}_-$ si ricava in maniera analoga od usando la relazione $\operatorname{arccosh}_+(\mathrm{y}) = -\operatorname{arccosh}_-(\mathrm{y})$.

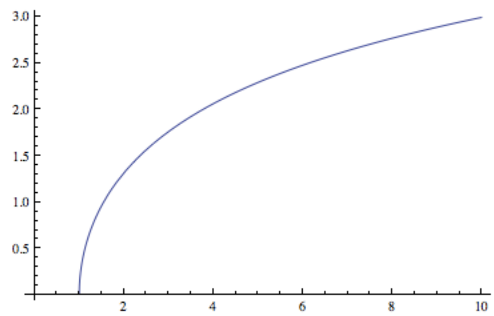

FIGURE 9

Cerchiamo ora di esprimere $x = \operatorname{arccosh}_\pm \mathrm{y}$ attraverso funzioni elementari note. Osserviamo che:

$$\begin{aligned} y &= \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \\ &= \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{2} = \\ &= \frac{e^{2x}+1}{2e^x}, \end{aligned}$$

che è equivalente a

$$e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0.$$

Risolvendo quest'equazione di secondo grado in e^x, otteniamo due soluzioni: $y \pm \sqrt{y^2 - 1}$, dove la radice è ben definita in quanto $y \geq 1$. Entrambe le soluzioni sono positive:

$$e^x = y \pm \sqrt{y^2 - 1}.$$

Quindi:

$$x = \text{arccosh}_{\pm}\text{y} = \log\left(\text{y} \pm \sqrt{\text{y}^2 - 1}\right).$$

Osserviamo infatti che:

$$\begin{aligned}
\text{arccosh}_{-}\text{y} &= \log\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right) = \\
&= \log\left(\frac{y^2 - (y^2 - 1)}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right) = \\
&= \log\left(\frac{1}{y + \sqrt{y^2 - 1}}\right) = \\
&= -\log\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right) = -\text{arccosh}_{+}\text{y}.
\end{aligned}$$

Esercizio aggiuntivo 2. Si definisca la *tangente iperbolica* come

$$\tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}.$$

Trovare il dominio e il codominio. Studiarne il segno, le eventuali simmetrie, la crescenza o la decrescenza, e disegnare un grafico approssimativo.
Trovarne l'inversa; si può esprimere attraverso funzioni elementari note?

Esercizio svolto 6 . Calcolare, se esistono, i seguenti limiti ($[\cdot]$ indica la parte intera e $\{\cdot\}$ la parte frazionaria):

a) $\lim_{x\to n}[x] \cdot \{x\}$, dove $n \in \mathbb{Z}$;
b) $\lim_{x\to n} |[x]|^{\{x\}}$, dove $n \in \mathbb{Z}$;
c) $\lim_{x\to -\infty} \left\{\sqrt{x^2 + 2x} + x\right\}$;
d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \sqrt{1-x}}{\sin x}$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$;
e) $\lim_{x\to 0} x \tan\left(ax + \arctan \frac{b}{x}\right)$, dove $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluzione.

a) Sia $n \in \mathbb{Z}$; osserviamo che:

$$\lim_{x\to n^-} [x] \cdot \{x\} = \lim_{x\to n^-} (n-1)\{x\} = n - 1$$
$$\lim_{x\to n^+} [x] \cdot \{x\} = \lim_{x\to n^-} (n)\{x\} = 0.$$

Quindi il limite esiste solamente per $n = 1$ e vale 0.

b) Sia $n \in \mathbb{Z}$ con $n \neq 0$; osserviamo che:

$$\lim_{x\to n^-} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x\to n^-} |n-1|^{\{x\}} = |n-1|$$
$$\lim_{x\to n^+} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x\to n^-} |n|^{\{x\}} = 1,$$

che coincidono solamente se $n = 2$ ed il limite vale 1. Se invece $n = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x\to 0^-} 1^{\{x\}} = 1$$
$$\lim_{x\to 0^+} |[x]|^{\{x\}} = \lim_{x\to 0^-} 0^{\{x\}} = 0,$$

quindi non esiste.

c) Studiamo l'argomento della parte frazionaria:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) &= \lim_{y\to+\infty}\left(\sqrt{y^2-2y}-y\right)\\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{-2y}{\sqrt{y^2-2y}+y}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\frac{-2}{\sqrt{1-2/y}+1} = -1.\end{aligned}$$

Osserviamo inoltre che $\frac{-2}{\sqrt{1-2/y+1}} < -1$, quindi possiamo concludere che l'argomento della parte frazionaria tende a -1 dal basso (da sinistra) e quindi:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\left\{\sqrt{x^2+2x}+x\right\} &= \lim_{y\to+\infty}\left\{\sqrt{y^2-2y}-y\right\}\\ &= \lim_{y\to+\infty}\left\{\frac{-2}{\sqrt{1-2/y}+1}\right\} = 1.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{\alpha x}-1}{\sin x}+\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin x}\right)\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\sin x}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin x} = (*).\end{aligned}$$

Cominciamo calcolando il secondo limite (che non dipende da α):

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2}.$$

Per quanto riguarda il secondo limite:
- osserviamo che se $\alpha = 0$ è chiaramente zero (infatti la funzione è identicamente nulla); quindi il limite $(*) = 1/2$;
- consideriamo il caso $\alpha \neq 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-1}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\left(\alpha\cdot\frac{e^{\alpha x}-1}{\alpha x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right) = \alpha.$$

In conclusione:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha x}-\sqrt{1-x}}{\sin x} = \alpha + \frac{1}{2}.$$

e) Soluzione:

$$\lim_{x\to 0} x \tan\left(ax + \arctan\frac{b}{x}\right) = \begin{cases} \frac{b}{1-ab} & \text{se } ab \neq 1 \\ -\infty & \text{se } ab = 1 \text{ e } a > 0 \\ +\infty & \text{se } ab = 1 \text{ e } a < 0. \end{cases}$$

Suggerimento: può essere utile la seguente identità trigonometrica

$$\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Esercizio svolto 7 . Trovare l'insieme dei punti di continuità delle seguenti funzioni $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

2. $$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{se } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \cap (0,1) \text{ (con} \operatorname{MCD}(p,q) = 1) \\ 1 & \text{se } x = 0,\ 1 \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

3. $$h(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 - x & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Soluzione.

1. Chiaramente f non è continua in alcun punto. Infatti, se $r_0 \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ basta prendere una successione di irrazionali $y_n \to r_0$ e si verifica facilmente che $\lim_{n\to+\infty} f(y_n) = 0 \neq 1 = f(r_0)$.
   In maniera analoga, se $y_0 \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ basta prendere una successione di razionali $r_n \to y_0$ e si ha $\lim_{n\to+\infty} f(r_n) = 1 \neq 0 = f(y_0)$. Quindi:
   $$\mathcal{C}ont(f) = \{\text{punti di continuità per } f\} = \emptyset.$$
2. La funzione g non è continua in alcun razionale. Infatti, se $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$, segue dalla definizione che $g(r) > 0$; ma se si prende una successione di irrazionali $y_n \to r$, si ottiene $\lim_{n\to+\infty} g(y_n) = 0 < g(r)$.
   Dimostriamo ora che g è continua in tutti gli irrazionali. Sia $y \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$; vogliamo dimostrare che se $x_n \to y$, allora $g(x_n) \to 0$. Poiché g vale zero su tutti gli irrazionali, ci basta dimostrarlo per le successioni di razionali. Infatti, se $x_n = \frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}$ (con $\operatorname{MCD}(p_n, q_n) = 1$) e $\frac{p_n}{q_n} \to y$, allora $q_n \to +\infty$ (si dimostra facilmente osservando che se esiste al più un numero finito di razionali in $[0,1]$ con denominatori più piccoli di un dato $M > 0$). In particulare, segue da ciò che $g(x_n) = g(\frac{p_n}{q_n}) = \frac{1}{q_n} \to 0 = g(y)$ e questo conclude la dimostrazione.
   In conclusione:
   $$\mathcal{C}ont(g) = \{\text{punti di continuità per } g\} = [0,1] \setminus \mathbb{Q}.$$
3. Si dimostra facilmente che
   $$\mathcal{C}ont(h) = \{\text{punti di continuità per } h\} = \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Esercizio svolto 8 .

1) Siano $f_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue. Dimostrare che $h(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$ è anch'essa continua. Generalizzare, per induzione, al caso di n funzioni continue.

2) Sia $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni continue $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e limitate superiormente in maniera uniforme, *i.e.*, esiste $M > 0$ tale che $f_n(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si definisca $h(x) = \sup_n\{f_n(x)\}$. È vero che h è continua su $[a,b]$?

Soluzione.

1) Distinguiamo due casi:
   - se x_0 è tale che $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ (risp. $f_1(x_0) < f_2(x_0)$), allora $h(x_0) = f_1(x_0)$ (risp. $h(x_0) = f_2(x_0)$). In particolare, esiste un intorno di x_0, che denoteremo $I_\delta(x_0) := (x_0-\delta, x_0+\delta)$, tale che $h(x) = f_1(x)$ per ogni $x \in I_\delta(x_0)$ (risp. $h(x) = f_2(x)$); quest'ultimo fatto segue dal teorema della permanenza del segno applicato alla funzione $f_1 - f_2$. Quindi, h coincide su $I_\delta(x_0)$ con una funziona continua e quindi è anch'essa continua in tale intorno.
   - Consideriamo ora il caso in cui $h(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Dalla definizione di continuità per f_1 e f_2 segue che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_1 = \delta_1(\varepsilon, x_0) \quad \text{t.c.} \quad |x - x_0| < \delta_1 \implies |f_1(x) - f_1(x_0)| < \varepsilon$$
$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_2 = \delta_2(\varepsilon, x_0) \quad \text{t.c.} \quad |x - x_0| < \delta_2 \implies |f_2(x) - f_2(x_0)| < \varepsilon.$$

In particolare, per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo scegliere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ e per $|x-x_0| < \delta$ otteniamo che (si usi il fatto che $h(x_0) = f_1(x_0) = f_2(x_0)$):

$$\begin{aligned}
& f_1(x), f_2(x) \in (h(x_0) - \varepsilon, h(x_0) + \varepsilon) \\
\iff \quad & h(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\} \in (h(x_0) - \varepsilon, h(x_0) + \varepsilon) \\
\iff \quad & |h(x) - h(x_0)| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

che ci permette di concludere che h è continua in x_0.

Nel caso di n funzioni continue il risultato rimane ancora vero; si può procedere per induzione su n, osservando che:

$$\max\{f_1, \ldots, f_n\} = \max\left\{\max\{f_1, \ldots, f_{n-1}\}, f_n\right\}.$$

2) Nel caso di una successione di funzioni il risultato non è più vero. Consideriamo infatti la seguente successione di funzioni $f_n : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definite da (disegnarne il grafico per esercizio):

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{se } x \in [0, 1/n] \\ 1 & \text{se } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

Per ogni $x \in (0,1]$, si ha che $h(x) = \sup_n f_n(x) = 1$. Infatti, non appena $\frac{1}{n} < x$ si ha che $f_n(x) = 1$ (ed ovviamente $f_n(x) \leq 1$ per ogni x e per ogni n). D'altro canto, $h(0) = 0$ in quanto $f_n(0) = 0$ per ogni n. Quindi

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ 1 & \text{se } x \in (0,1] \end{cases}$$

che è chiaramente discontinua in 0.

Esercizio svolto 9. Sia $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = f(2\pi)$ (si può anche interpretare come una funzione continua sul cerchio). Dimostrare che esiste un punto $x_0 \in [0, \pi)$ tale che $f(x_0) = f(x_0 + \pi)$ (in altre parole, due punti opposti sul cerchio in cui la funzione assume lo stesso valore).

(Osservazione: questo esercizio, ad esempio, ci permette di concludere che in ogni istante esistono sempre due punti antipodali sull'equatore terrestre in cui la temperatura è la stessa!)

Soluzione. Quest'esercizio è un'applicazione del teorema dei valori intermedi (o del teorema di esistenza degli zeri).
Consideriamo la funzione $h(x) = f(x) - f(x + \pi)$; ovviamente si tratta di una funzione continua su $[0, \pi]$.

- Se $h(0) = 0$, allora abbiamo che $f(0) = f(\pi)$, quindi basta scegliere $x_0 = 0$.
- Se $h(0) \neq 0$, osserviamo che $h(\pi) = f(\pi) - f(2\pi) = f(\pi) - f(0) = -h(0)$. Quindi h deve annularsi necessariamente in un qualche punto $x_0 \in (0, \pi)$ (in quanto agli estremi dell'intervallo $[0, \pi]$ assume valori di segno opposto).

Esercizio aggiuntivo 3 (**). Sia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = f(1)$. Dimostare che per ogni $n \geq 2$ esiste un punto $x_n \in [0, 1 - 1/n)$ tale che $f(x_n) = f(x_n + 1/n)$.
Mostrare che se $c \in (0, 1) \setminus \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, allora esiste una funzione continua $f_c : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tale che $f_c(0) = f_c(1)$, ma $f(x) \neq f(x + c)$ per ogni $x \in [0, 1 - c)$.