AM110 - A.A. 2013/14

ALFONSO SORRENTINO

Esercizi sui limiti di successioni

Esercizio svolto 1. Usando la definizione di limite, dimostare che:

$$\text{(a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \text{(b)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2} = 0.$$

Soluzione.
Cominciamo da (a). Vogliamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad \left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon.$$

Osserviamo che:

$$\left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| \quad = \quad \left| \frac{2n-2n-3}{2(2n+3)} \right| = \frac{3}{4n+6}.$$

Quindi:

$$\left| \frac{n}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| = \frac{3}{4n+6} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad n > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}.$$

Basta scegliere un intero positivo $N_\varepsilon > \frac{3}{4\varepsilon} - \frac{3}{2}$.

Dimostriamo ora (b). Vogliamo dimostrare che:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall\, n \geq N_\varepsilon \quad \text{si ha} \quad \left| \frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2} \right| < \varepsilon.$$

Osserviamo che:

$$\left| \frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2} \right| \quad = \quad \frac{\left|\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)\right|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Quindi:

$$n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{\sin\left(e^{\pi\cos n}\right)}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} < \varepsilon.$$

Basta scegliere un intero positivo $N_\varepsilon > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$.

Esercizio svolto 2. Verificare i seguenti limiti usando la definizione:

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+4}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$;

b) $\lim_{n\to+\infty} \left(n - \sqrt{n^2-1}\right) = 0$;

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} = \frac{1}{3}$;

d) $\lim_{n\to+\infty}\left(n^2 - n\sin n\right) = +\infty$.

Soluzione.

a) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$\left|\frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$
Infatti
$$\left|\frac{n^2+4}{2n^2+3} - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{4n^2+6},$$
quindi basterà scegliere $N_0 > \max\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{\varepsilon} - 6},\, 0\right\}$.

b) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| < \varepsilon.$$
Osserviamo che
$$\left|n - \sqrt{n^2-1}\right| = n - \sqrt{n^2-1} = \frac{1}{n + \sqrt{n^2-1}} < \frac{1}{n},$$
quindi sarà sufficiente scegliere $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$.

c) Vogliamo dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$\left|\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$
Osserviamo che:
$$\begin{aligned}\left|\frac{n^2 - n\sin n}{3n^2+\cos n} - \frac{1}{3}\right| &= \frac{|3n\sin n + \cos n|}{|9n^2 + 3\cos n|} \leq \\ &\leq \frac{3n|\sin n| + |\cos n|}{9n^2+3\cos n} \leq \\ &\leq \frac{3n+1}{9n^2-3} \leq \\ &\leq \frac{3n+\sqrt{3}}{9n^2-3} = \\ &= \frac{1}{3n-\sqrt{3}},\end{aligned}$$
quindi basta scegliere $N_0 > \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{3}\right)$.

d) Vogliamo dimostrare che per ogni $M > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$:
$$n^2 - n\sin n > M.$$
Osserviamo che
$$n^2 - n\sin n > n^2 - n = n(n-1) > (n-1)^2,$$
quindi basterà scegliere $N_0 > 1 + \sqrt{M}$.

Esercizio svolto 3. Siano $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ due successioni tali che:

(a) $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$;
(b) $|b_n| < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dimostrare o confutare le seguenti affermazioni:

(i) Esiste $\lim_{n\to+\infty}(a_n + b_n)$.

(ii) Esiste N tale che $2a_n - b_n > 0$ per ogni $n > N$.

(iii) Esiste N tale che $a_n + b_n > 0$ per ogni $n > N$.

(iv) Esiste K tale che $Ka_n + b_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Soluzione.

(i) Falso. Ad esempio, basta considerare $a_n \equiv 1$ e $b_n = (-1)^n$. La successione $a_n + b_n$ non ha limite in quanto vale 0 per gli n dispari e 2 per gli n pari.

(ii) Vero. Dal momento che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 1$, possiamo dedurre che esiste $N > 0$ tale che
$$\frac{1}{2} < a_n < \frac{3}{2} \qquad \forall\, n > N.$$
Quindi, usando che $|b_n| < 1$, possiamo dedurre che:
$$2a_n - b_n > 0 \qquad \forall\, n > N.$$

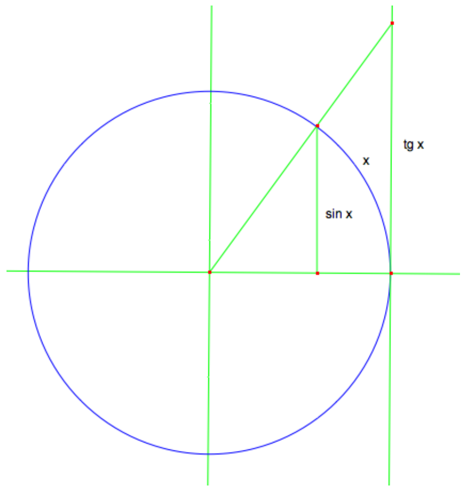
(iii) Falso. Basta scegliere $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ e $b_n = -1 + \frac{1}{2n}$. Chiaramente queste due successioni soddisfano le ipotesi (a) e (b). In particolare:
$$a_n + b_n = 1 - \frac{1}{n} - 1 + \frac{1}{2n} = -\frac{1}{2n} < 0 \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

(iv) Procedendo come in (ii) possiamo dedurre che esiste N tale che se $K > 2$:
$$Ka_n + b_n > 0 \qquad \forall\, n > N.$$
Rimane da considerare cosa succede per i primi N termini della successione. Se $i = 1, \ldots, N$ si ha (useremo il fatto che $a_n > 0$ per ogni n):
$$Ka_i + b_i > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad K > -\frac{b_i}{a_i}.$$
Quindi, basterà scegliere $K > \max\left\{2, -\frac{b_1}{a_1}, \ldots, -\frac{b_n}{a_n}\right\}$.

Esercizio svolto 4. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali (diversi da zero) tali che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Dimostrare che:
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \frac{1}{2}.$$

Soluzione. Innanzitutto, osservare che se $0 < x < \frac{\pi}{2}$, allora:
$$\sin x \le x \le \tan x.$$
(vedere figura qui sotto).

Di conseguenza:
$$1 \le \frac{x}{\sin x} \le \frac{1}{\cos x} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \cos x \le \frac{\sin x}{x} \le 1 \qquad \forall\, 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$



Osserviamo che $\cos x$ e $\frac{\sin x}{x}$ sono entrambi funzioni pari, quindi la disuguaglianza di sopra si può estendere ai valori di $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Riassumendo:

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1 \qquad \forall -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2},\ x \neq 0.$$

Sia ora $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali che tende a 0; quindi, esiste N_0 tale che $|a_n| < \frac{\pi}{2}$ per $n > N_0$. Di conseguenza:

$$\cos a_n \leq \frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1 \qquad \forall\, n > N_0.$$

Usando il teorema del confronto possiamo concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1.$$

Per dimostrare il secondo limite, basta osservare che:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1+\cos a_n}{1+\cos a_n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\cos^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2} \cdot \frac{1}{1+\cos a_n} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\cos a_n} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio svolto 5. Calcolare i seguenti limiti:

(1) $\lim_{n\to+\infty}(e^n - 2^n)$

(2) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{n+1}+1}{3^n+1}$

(3) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2n}$

(4) $\lim_{n\to+\infty}(n - \log n)$

(5) $\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n-4^n}{3^n-n!}$

(6) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!+2^n}{(n+1)!}$

(7) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{A^n+B^n}$, con $A, B > 0$

(8) $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)$

(9) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi\, n-2^{-n}}{\log n-2n}$

(10) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-\sin n}{2n+(-1)^n}$

(11) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^4-n\arctan n}{2\pi n^4-n^3+n^2+2}$

(12) $\lim_{n\to+\infty} n\sin(\pi\, n)$

(13) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan n}{n+\arctan(n-1)}$

(14) $\lim_{n\to+\infty} \frac{6\cos n-n}{2\tan(1/n)+2n}$

(15) $\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{n^2+1}{1-n}\right)$

(16) $\lim_{n\to+\infty} \left(n^{\log n}-n^2\right)$

(17) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-\sin n}{2n^3+(-1)^n-1}$

(18) $\lim_{n\to+\infty} (n-n\arctan n)$

(19) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^3+1)}{\log(2n^5-8)}$

(20) $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n^2+n}$

(21) $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(1-\cos\left(\frac{1}{2^n}\right)\right)$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

(22) $\lim_{n\to+\infty} (n^{n^\alpha}-e^n)$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

(23) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^\alpha}}-1}$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

(24) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+n^\alpha)}{\log n}$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

(25) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+e^n)}{n^\alpha}$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

(26) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^4+n^3}-\sqrt{n^4-n^3}}{n+n^\alpha}$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

(27) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(\alpha^n)}{n^{\alpha-1}}$ per ogni $\alpha>0$

(28) $\lim_{n\to+\infty} n^\alpha\left(\sqrt[5]{n^2+n}-\sqrt[5]{n^2+2n+1}\right)$ per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$

Soluzione.

(1) $+\infty$
(2) 0
(3) 1
(4) $+\infty$

(5) 0
(6) 0
(7) $\max\{A, B\}$
(8) $\frac{1}{2}$
(9) $-\frac{\pi}{2}$
(10) $+\infty$
(11) $\frac{3}{2\pi}$
(12) 0
(13) 0
(14) $-1/2$
(15) $-\frac{\pi}{2}$
(16) $+\infty$
(17) $1/2$
(18) $-\infty$
(19) $3/5$
(20) 1
(21) 0 per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$
(22) $-\infty$ se $\alpha < 1$ e $+\infty$ se $\alpha \geq 1$
(23) 0 se $\alpha < 3$, 3 se $\alpha = 3$ e $+\infty$ se $\alpha > 3$
(24) 0 se $\alpha \leq 0$ e α se $\alpha > 0$
(25) $+\infty$ se $\alpha < 1$, 1 se $\alpha = 1$ e 0 se $\alpha > 1$
(26) 1 se $\alpha < 1$, $1/2$ se $\alpha = 1$ e 0 se $\alpha > 1$
(27) 0 se $\alpha \neq 1$ e $\sin(1)$ se $\alpha = 1$
(28) $+\infty$ se $\alpha > 3/5$, $1/5$ se $\alpha = 3/5$ e 0 se $\alpha < 3/5$

Esercizio svolto 6. Si consideri la seguente successione:

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad \text{for } n \geq 0. \end{cases}$$

Dimostrare che $\lim_{n \to +\infty} a_n$ esiste e calcolarlo.

Soluzione. Cominciamo col dimostrare che la successione è monotona crescente, *i.e.* $a_{n+1} \geq a_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Dimostriamolo per induzione; la base dell'induzione è verificata: $a_1 = \sqrt{2} \geq 1 = a_0$. Supponiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n + 1$:

$$a_{n+2} = \sqrt{1 + a_{n+1}} \geq \sqrt{1 + a_n} = a_{n+1}.$$

Dimostriamo ora che la successione è limitata dall'alto, ad esempio: $a_n \leq 2$ per ogni n. Dimostriamolo per induzione. Per $n = 0$ è vero; supponiamo che sia vero per n e dimostriamolo per $n + 1$:

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \leq \sqrt{3} < 2.$$

Quindi, la successione $\{a_n\}_n$ ammette limite finito; sia $\ell = \lim_{n \to +\infty} a_n$. In particolare:

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \quad \text{for } n \geq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = \sqrt{1 + \ell}.$$

Ne segue che:

$$\ell = \sqrt{1 + \ell} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell^2 - \ell - 1 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ell = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Dal momento che la successione è positiva, possiamo dedurre che $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Esercizio svolto 7. Si considerino due successioni di numeri reali $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ tali che:

- $a_1 > b_1 > 0$,
- $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
- $b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$.

Dimostrare che $\lim_{n\to+\infty} a_n$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n$ esistono e calcolarli.

Soluzione. Cominciamo col dimostrare alcune proprietà di queste successioni.

a) $a_n > b_n > 0$ per ogni n. Innanzitutto, si verifica facilmente (per induzione) che a_n e b_n sono sempre positivi. Dimostriamo per induzione che $a_n > b_n$ per ogni n. La base dell'induzione ($n = 1$) è vera per ipotesi. Supponiamo che tale proprietà sia vera per n e dimostriamolo per $n + 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} > b_{n+1} &\iff \frac{a_n+b_n}{2} > \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \\ &\iff (a_n+b_n)^2 > 4a_nb_n \\ &\iff a_n^2+b_n^2+2a_nb_n > 4a_nb_n \\ &\iff a_n^2+b_n^2-2a_nb_n > 0 \\ &\iff (a_n-b_n)^2 > 0 \end{aligned}$$

dove l'ultima disuguaglianza è vera per ipotesi induttiva.

b) a_n è monotona decrescente. Usando il fatto che $b_n < a_n$ per ogni n, otteniamo infatti:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} < \frac{2a_n}{2} = a_n.$$

c) In maniera simile si dimostra che b_n è monotona crescente. Usando il fatto che $b_n < a_n$ per ogni n, infatti, otteniamo:

$$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} > \frac{2a_nb_n}{a_n+a_n} = b_n.$$

Riassumendo, abbiamo dimostrato che per ogni n:

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > 0.$$

Possiamo concludere che:

- Esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n =: \alpha \in \mathbb{R}$. Infatti a_n è monotona decrescente e limitata dal basso da - per esempio - b_1.
- Esiste $\lim_{n\to+\infty} b_n =: \beta \in \mathbb{R}$. Infatti b_n è monotona crescente e limitata dall'alto da - per esempio - a_1.

In particolare:

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \qquad\iff\qquad \alpha = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad\iff\qquad \alpha = \beta,$$

quindi i due limiti coincidono. Considerando l'altra relazione (ed usando che $\alpha = \beta$) non otteniamo purtroppo maggiori informazioni:

$$b_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \qquad\iff\qquad \beta = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \qquad\iff\qquad \beta = \beta.$$

Vediamo com'è possibile ottenere maggiori informazioni sul valore del limite. Osserviamo infatti che per ogni n si ha:

$$a_{n+1}b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \cdot \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} = a_nb_n;$$

quindi il prodotto è costante e di conseguenza $a_n b_n = a_1 b_1$ per ogni n. Possiamo quindi dedurre che:

$$\alpha^2 = \lim_{n\to+\infty} a_n b_n = a_1 b_1 \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Concludendo:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \sqrt{a_1 b_1}.$$

Esercizio aggiuntivo 1. Si consideri la seguente successione:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha + 2 & \text{for } \alpha \geq 0 \\ a_{n+1} = \left(a_n - \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{n+1} & \text{for } n \geq 1. \end{cases}$$

Calcolare $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Esercizio svolto 8 (Teoremi di Cesaro). Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali.

i) Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = L.$$

ii) Dimostrare che se $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1} - a_n) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = L.$$

iii) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} = L.$$

iv) Se $a_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, dimostrare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Soluzione. Dimostremo tutte le proprietà nel caso $L \in \mathbb{R}$. L'estensione al caso $L = \pm\infty$ è lasciata come (semplice) esercizio.

i) Per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} a_n = L$; fissato $\varepsilon > 0$, esisterà N_ε tale che:

$$L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon \qquad \forall\, n > N_\varepsilon.$$

Quindi per $n > N_\varepsilon$ si ha:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k + \frac{n - N_\varepsilon}{n}(L - \varepsilon) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k + \frac{n - N_\varepsilon}{n}(L + \varepsilon).$$

Osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} a_k = 0$, quindi:

$$L - \varepsilon \leq \liminf \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \limsup \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq L + \varepsilon.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $\varepsilon > 0$, quindi si può concludere che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = L. \qquad \square$$

ii) Considerare la successione $b_n := a_{n+1} - a_n$ ed applicare il punto (*i*).

iii) Considerare la successione $b_n := \log a_n \longrightarrow \log L$ (con la convenzione che $\log 0 = -\infty$). Usando (i) si ottiene:

$$\log L \longleftarrow \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} b_k \quad = \quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log a_k = \log \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}$$

e di conseguenza:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = L.$$

iv) Considerare la successione $b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$ ed applicare il punto (iii).

Esercizio svolto 9. Calcolare i seguenti limiti:

i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^{1/2}+3^{1/3}+\ldots+n^{1/n}}{n}$.

ii) $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!}$.

iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

iv) $\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n!}$.

Soluzione.

i) Applicare Esercizio 4 (i) con $a_n = n^{1/n}$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+2^{1/2}+3^{1/3}+\ldots+n^{1/n}}{n} = 1.$$

ii) Applicare Esercizio 4 (iii) con $a_n = n$. Poiché $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

iii) Osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}.$$

Applicare Esercizio 4 (iv) con $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Infatti:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{n^n} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,\end{aligned}$$

e di conseguenza (esercizio 4 (iv)) possiamo concludere che:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

iv) Osservare che:

$$\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n!} \quad = \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\log n! = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log k.$$

Applicando Esercizio 4 (i)) con $a_n = \log n$ possiamo concludere che:

$$\lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n!} = +\infty.$$

Esercizio svolto 10. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali. Verificare che

$$a_n \longrightarrow \ell \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{2n} \longrightarrow \ell \quad \text{e} \quad a_{2n+1} \longrightarrow \ell.$$

Soluzione. $[\Longrightarrow]$ Segue dalla definizione di limite che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > N_\varepsilon.$$

In particolare:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |a_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > \frac{N_\varepsilon}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \ell$$

ed in maniera simile

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |a_{2n+1} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > \frac{N_\varepsilon}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{2n+1} = \ell.$$

□

$[\Longleftarrow]$ Segue dalla definizione di limite che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |a_{2n} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > N_\varepsilon$$

e

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad |a_{2n+1} - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > M_\varepsilon.$$

Scegliamo $K_\varepsilon := \max\{2N_\varepsilon, 2M_\varepsilon + 1\}$. Si verifica facilmente che:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |a_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n > K_\varepsilon$$

e di conseguenza:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell.$$

□

Esercizio aggiuntivo 2. Sia $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali.

a) Se a_n è monotona e $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \ell$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.
b) Se a_{2n} e a_{2n+1} sono entrambe monotone e $\lim_{n\to+\infty}(a_{2n+1} - a_{2n}) = 0$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste.
c) Se a_{2n} e a_{2n+1} sono entrambe monotone e $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 1$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n$ esiste.