AM110 - A.A. 2013/14

ALFONSO SORRENTINO

Esercizi sulle Serie numeriche

Esercizio svolto 1. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right]$

c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log(n+1)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\frac{1}{\sqrt{n}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n!}}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n}$

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}}$

l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$

m) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^{\alpha}}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

n) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n}$ con $x \in \mathbb{R}$

Soluzione.

a) Innanzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi e che la condizione necessaria di Cauchy è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 0$. Osserviamo ora che se $n \geq 2$:
$$\frac{n}{(n+1)!} = \frac{n}{(n+1)\cdot n \cdot (n-1)!} \leq \frac{1}{n^2-1} \leq \frac{2}{n^2}.$$
Usando il criterio del confronto:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2} < +\infty,$$
quindi la serie converge.

In particolare, è possibile calcolare esattamente il valore della somma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{(n+1)!} = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty} 1-\frac{1}{(N+1)!} = 1.\end{aligned}$$

b) Innanzitutto osserviamo che si tratta di una serie a termini positivi e che la condizione necessaria di Cauchy è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=0$. Usando il fatto che $\log(1+x)\le x$ per ogni $x\ge 0$, si ottiene (per $n\ge 2$):

$$\begin{aligned}-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right) &= \log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) \le \frac{n^2}{n^2-1}-1 = \\ &= \frac{1}{n^2-1}\le\frac{2}{n^2}.\end{aligned}$$

Usando il criterio del confronto:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] \le \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n^2}<+\infty,$$

quindi la serie converge.

In particolare, è possibile calcolare esattamente il valore della somma:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\left[-\log\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right] = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=2}^{N}\log\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\log\left(\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2}{n^2-1}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\log\left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{N\cdot N}{(N-1)(N+1)}\right) = \\ &= \lim_{N\to+\infty}\log\left(\frac{2N}{N+1}\right) = \\ &= \log 2\,.\end{aligned}$$

c) Usando il fatto che $\log(1+x)\le x$ per ogni $x\ge 0$, si ottiene:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\ge\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}=+\infty,$$

quindi la serie diverge positivamente.

d) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)$ diverge negativamente. Infatti, è a termini negativi e non è soddisfatta la condizione necessaria di Cauchy:

$$\lim_{n\to+\infty}\log\left(\frac{n+1}{n^2}\right)=-\infty.$$

e) Cominciamo con l'osservare che (dimostrarlo come esercizio)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Quindi, segue dalla definizione di limite che esiste un N_0 tale che per ogni $n \geq N_0$:

$$\frac{\arctan \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} \geq \frac{1}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Applicando il criterio del confronto si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} &= \sum_{n=1}^{N_0-1} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \\ &\geq \sum_{n=1}^{N_0-1} \arctan \frac{1}{\sqrt{n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = +\infty, \end{aligned}$$

da cui segue che la serie diverge positivamente.

f) Osserviamo innanzitutto che si tratta di una serie a termini positivi. Inoltre, ricordiamo che per ogni $a, b > 0$ si ha:

$$a^{\log b} = b^{\log a}.$$

Quindi, usando il criterio del confronto si ottiene:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\log 2}} = +\infty,$$

in quanto $\log 2 \in (0, 1)$.

g) Ragionando come in (f) ed usando il fatto che $n! \geq n^2$ per $n \geq 4$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log n!}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} = \\ &= \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} = \\ &\leq \sum_{n=1}^{3} \frac{1}{(n!)^{\log 2}} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^{2\log 2}} < +\infty, \end{aligned}$$

in quanto $2\log 2 = \log 4 > 1$.

h) Si tratta di una serie a termini positivi. Possiamo applicare il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{(n!)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0 < 1,$$

quindi la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{(n!)^n} < +\infty.$$

i) Cominciamo con l'osservare che:

$$a_n \quad := \quad \frac{1}{\begin{pmatrix} 4n \\ 3n \end{pmatrix}} = \frac{(3n)! \cdot n!}{(4n)!}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(3(n+1))! \cdot (n+1)!}{(4(n+1))!} \cdot \frac{(4n)!}{(3n)! \cdot n!} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)} = \\
&= \frac{3^3}{4^4} = \frac{27}{256} < 1.
\end{aligned}$$

Quindi la serie converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\begin{pmatrix} 4n \\ 3n \end{pmatrix}} < +\infty.$$

l) Si tratta di una serie a termini positivi. Cominciamo con l'osservare che per ogni $\alpha > 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{(\log n)^{\log n}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\alpha \log n}}{e^{\log n \log(\log n)}} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\alpha \log n - \log n \log(\log n)} = \\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{\log n(\alpha - \log(\log n))} = 0.
\end{aligned}$$

Quindi, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $N_0 = N_0(\alpha, \varepsilon)$ tale che per ogni $n \geq N_0$ si ha:

$$\frac{n^\alpha}{(\log n)^{\log n}} < \varepsilon \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \leq \frac{\varepsilon}{n^\alpha}.$$

Scegliendo $\alpha > 1$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} &= \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{N_0-1} \frac{1}{(\log n)^{\log n}} + \sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n^\alpha} < +\infty.
\end{aligned}$$

m) Studiamo la serie al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.
  - Caso $\alpha \leq 0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^{|\alpha|}}{n} \geq \\
&\geq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log 2)^{|\alpha|}}{n} = +\infty.
\end{aligned}$$

  Quindi la serie diverge positivamente per $\alpha \leq 0$.

  - Caso $\alpha > 0$: applichiamo il criterio di condensazione di Cauchy. Le condizioni del criterio sono soddisfatte in quanto il termine n-simo della serie è non negativo, decrescente e tende a zero. Quindi il comportamento della serie è equivalente al comportamento della seguente serie "condensata":

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (\log 2^n)^\alpha} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log 2)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

n) Cominciamo col verificare per quali valori di x la condizione necessaria di Cauchy è soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n} = \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{x}{5}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 5 \\ +\infty & \text{se } x \geq 5 \\ \text{non esiste} & \text{se } x \leq -5. \end{cases}$$

Dobbiamo quindi considerare soltanto i valori di $x \in (-5, 5)$. Dimostriamo che la serie converge assolutamente per tali valori. Infatti, applicando il criterio della radice (alla serie dei valori assoluti) si ottiene:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2 |x|^n}{5^n}} = \frac{|x|}{5} < 1,$$

quindi la serie dei valori assoluti è convergente.

Riassumendo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{5^n} = \begin{cases} < +\infty & \text{se } |x| < 5 \\ +\infty & \text{se } x \geq 5 \\ \text{non converge} & \text{se } x \leq -5. \end{cases}$$

Esercizio aggiuntivo 1. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche al variare dei parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

1. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}.$$
   [Sol.: se $\alpha > 1$ converge; se $\alpha < 1$ diverge; se $\alpha = 1$ e $\beta > 1$ converge; se $\alpha = 1$ e $\beta \leq 1$ diverge.]
2. $$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n [\log(\log n)]^\alpha}.$$
   [Sol.: Diverge se $\alpha \leq 1$ e converge altrimenti.]
3. $$\sum_{n=N_0}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log(n) \cdot [\log(\log n)] \cdot \ldots \cdot \underbrace{[\log(\ldots \log(\log(\log n)))]}_{\text{k}-\text{volte}}}.$$
   [Sol.: Diverge]

Esercizio aggiuntivo 2 [Criterio del confronto asintotico]. Siano $a_n > 0$ e $b_n > 0$ e supponiamo che $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \ell \in [0, +\infty]$. Dimostrare che:

1. Se $0 < \ell < +\infty$, allora le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ hanno lo stesso carattere (i.e., entrambe divergono o entrambe convergono).
2. Se $\ell = 0$, allora se $\sum_n b_n < +\infty$ allora anche $\sum_n a_n < +\infty$.
3. Se $\ell = +\infty$, allora se $\sum_n b_n = +\infty$ allora anche $\sum_n a_n = +\infty$.

Esercizio aggiuntivo 3. Siano $a_n > 0$ e supponiamo che $\sum_n a_n = +\infty$. Dimostrare che esistono $b_n > 0$ tali che $\frac{a_n}{b_n} \stackrel{n\to=\infty}{\longrightarrow} 0$ e $\sum_n b_n = +\infty$.

Esercizio svolto 2. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot\cos(\pi n)}{n^3+3}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log\left(\frac{n-2}{n+1}\right)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} [2\arctan(n+1) - \pi]\cdot\cos((n+1)\pi)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$

Soluzione.

a) Osserviamo che la condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$. La serie non converge assolutamente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$
Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \frac{1}{n}$ soddisfa le condizioni (i-iii), quindi la serie converge semplicemente:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < +\infty.$$

b) La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n} = 0$. La serie non converge assolutamente (ricordiamo che $\sin\frac{1}{n}$ ha lo stesso comportamento asintotico di $\frac{1}{n}$, in quanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$):
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \sin\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$
Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \sin\frac{1}{n}$ soddisfa le condizioni (i-iii) (infatti $\sin x$ è crescente in $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e di conseguenza $\sin\frac{1}{n}$ è decrescente),

quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n} < +\infty.$$

c) Cominciamo con l'osservare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot\cos(\pi n)}{n^3+3} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n^3+3}.$$

La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n^3+3} = 0$. Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n^3+3}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^3+3} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3-\frac{1}{2}}+\frac{3}{\sqrt{n}}} \le \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{2}}} < +\infty,\end{aligned}$$

quindi la serie converge assolutamente.

d) La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) = 0$. Cominciamo con l'osservare che:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\log\left(\frac{n+1}{n-2}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\log\left(\frac{(n-2)+3}{n-2}\right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right).\end{aligned}$$

La serie non converge assolutamente (ricordiamo che $\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ si comporta asintoticamente come $\frac{3}{n-2}$, in quanto $\lim_{n\to+\infty}\frac{\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)}{\frac{3}{n-2}} = 1$):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n-2} = +\infty.$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ soddisfa le condizioni (i-iii) (infatti $\log x$ è crescente e di conseguenza $\log\left(1+\frac{3}{n-2}\right)$ è decrescente), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log\left(\frac{n-2}{n+1}\right) < +\infty.$$

e) La condizione necessaria è soddisfatta: $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3} = 0$. La serie non converge assolutamente. Infatti (ricordando che $\log n \leq \sqrt{n}$ per $n \geq 1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+3\log n} \geq \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+3\sqrt{n}} = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\sqrt{n}} = +\infty.
\end{aligned}$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+\log n^3}$ soddisfa chiaramente le condizioni (i-iii), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\log n^3} < +\infty.$$

f) La condizione necessaria è soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty} [2\arctan(n+1) - \pi] \cdot \cos((n+1)\pi) = 0.$$

Cominciamo con l'osservare che:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} [2\arctan(n+1) - \pi] \cdot \cos((n+1)\pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} [2\arctan(n+1) - \pi] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n [\pi - 2\arctan(n+1)] = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right),
\end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la seguente identità trigonometrica:

$$\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Quindi, la serie non converge assolutamente.
Infatti, usando il fatto che $\arctan \frac{1}{n+1}$ si comporta asintoticamente come $\frac{1}{n+1}$ (si ricordi che $\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n 2\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) \sim \\
&\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n+1} = +\infty.
\end{aligned}$$

Applichiamo il criterio di Leibniz: $a_n = 2\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ soddisfa le condizioni (i-iii) (infatti $\arctan x$ è crescente e di conseguenza $\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right)$ è decrescente), quindi la serie converge semplicemente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n 2\arctan\left(\frac{1}{n+1}\right) < +\infty.$$

g) Cominciamo col riscrivere la serie in una forma più utile:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right) &= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n(n+1)+1}{n+1}\pi\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{n+1}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\cos(n\pi)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

La condizione necessaria è chiaramente soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty}(-1)^n\sin\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = 0.$$

Per quanto già visto nell'esercizio 1 b), la serie converge semplicemente ma non assolutamente.

Esercizio svolto 3. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$

Soluzione.

a) La condizione necessaria è chiaramente soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}} = 0.$$

La serie non converge assolutamente (osservare che $n+(-1)^{n+1} > 0$ per ogni $n \geq 1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n+1}}\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+(-1)^{n+1}} \geq \\
&\geq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1} = +\infty.
\end{aligned}$$

Studiamo la convergenza semplice. Denominiamo $a_n = \frac{1}{n+(-1)^{n+1}}$. La serie in esame è della forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$. Le ipotesi del criterio di Leibniz non sono però soddisfatte. Infatti:

– $a_n > 0$ per ogni $n \geq 1$;
– $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$;

– ma a_n NON è decrescente. Infatti:

$$a_{2n} = \frac{1}{2n + (-1)^{2n+1}} = \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n} = \frac{1}{(2n-1) + (-1)^{(2n-1)+1}} = a_{2n-1}.$$

Non possiamo dedurre niente dal criterio di Leibniz. Osserviamo che per $n \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} &= \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} \cdot \frac{n - (-1)^{n+1}}{n - (-1)^{n+1}} = \\
&= (-1)^n \frac{n - (-1)^{n+1}}{n^2 - 1} = \\
&= (-1)^n \frac{n}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-1}\,.
\end{aligned}$$

Quindi:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} &= \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n + (-1)^{n+1}} = \\
&= -\frac{1}{2} + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=2}^{N} \left((-1)^n \frac{n}{n^2-1} + \frac{1}{n^2-1} \right) = \\
&= -\frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} < +\infty
\end{aligned}$$

Infatti:

– la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1}$ converge assolutamente;
– la serie $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2-1}$ converge per il criterio di Leibniz. Sia infatti $b_n = \frac{n}{n^2-1}$. Chiaramente $b_n > 0$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$. Inoltre, $b_n \geq b_{n+1}$ per ogni n. Infatti:

$$\begin{aligned}
b_n \geq b_{n+1} &\iff \frac{n}{n^2-1} \geq \frac{(n+1)}{(n+1)^2 - 1} \\
&\iff \frac{1}{n - \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{(n+1) - \frac{1}{n+1}} \\
&\iff n - \frac{1}{n} \leq (n+1) - \frac{1}{n+1} \\
&\iff \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \leq 1\,,
\end{aligned}$$

che è chiaramente vera ($\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0$).

Concludendo, la serie converge semplicemente (nonostante il criterio di Leibniz NON sia soddisfatto), ma non converge assolutamente.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right)$

La condizione necessaria è chiaramente soddisfatta:

$$\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) = 0.$$

La serie non converge assolutamente (osservare che $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \geq 0$ per ogni $n \geq 1$):

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) \geq \\
&\geq \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) + \sum_{n=4}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = +\infty,
\end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è usato che $n \geq 2\sqrt{n}$ per $n \geq 4$.

Studiamo la convergenza semplice. Denominiamo $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. La serie in esame è della forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ ma le ipotesi del criterio di Leibniz non sono soddisfatte (in particolare a_n non è decrescente!). Dimostriamo che la serie non converge assolutamente.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) &= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right) = \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \right) = \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.
\end{aligned}$$

Infatti:
– la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ è divergente;
– la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ converge per il criterio di Leibniz. Sia infatti $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Chiaramente $b_n > 0$, $\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$ e b_n è decrescente.

Concludendo, la serie diverge positivamente.

Esercizio svolto 4. Consideriamo le seguenti due serie:

$$\text{(I)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} s_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

$$\text{(II)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} t_n := 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \dots$$

(osservare che si tratta di un riordinamento della stessa serie). Si denoti con S_N e T_N le rispettive somme parziali e con $H_N := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.

a) Si dimostri che:

$$S_{2N} = H_{2N} - H_N \qquad \text{e} \qquad T_{3N} = H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N.$$

b) Si dimostri che le due serie sono entrambi convergenti:

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n = \sigma \neq 0 \qquad \text{mentre} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{3}{2}\sigma.$$

In particolare, le due serie convergono a valori diversi, nonostante siano – a meno di un riordinamento – la stessa serie.

Soluzione.

a) Cominciamo col dimostrare che $S_{2N} = H_{2N} - H_N$. Lo dimostreremo per induzione. La base dell'induzione (N=1) è vera:

$$S_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad H_2 - H_1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Supponiamo che sia vero per N e dimostriamolo per $N+1$:

$$\begin{aligned}
S_{2(N+1)} &= S_{2N} + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2} = \\
&= H_{2N} - H_N + \frac{1}{2N+1} - \frac{1}{2N+2} = \\
&= \left(H_{2N} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2}\right) - \left(H_N + \frac{1}{N+1}\right) = \\
&= H_{2(N+1)} - H_{N+1}.
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora l'altra uguaglianza: $T_{3N} = H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N$. Osserviamo innanzitutto che la somma è della forma:

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} + \ldots$$

Dimostriamo l'uguaglianza per induzione. La base dell'induzione ($N = 1$) è verificata:

$$\begin{aligned}
&T_3 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}\\
&H_4 - \frac{1}{2}H_2 - \frac{1}{2}H_1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

Supponiamo ora che sia vera per N e dimostriamola per $N+1$:

$$\begin{aligned}
T_{3(N+1)} &= T_{3N} + \frac{1}{4(N+1)-3} + \frac{1}{4(N+1)-1} - \frac{1}{2(N+1)} = \\
&= H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N + \frac{1}{4N+1} + \frac{1}{4N+3} - \frac{1}{2N+2)} = \\
&= \left(H_{4N} + \frac{1}{4N+1} + \frac{1}{4N+2} + \frac{1}{4N+3} + \frac{1}{4N+4}\right) - \\
&\quad - \frac{1}{2}\left(H_{2N} + \frac{1}{2N+1} + \frac{1}{2N+2}\right) - \frac{1}{2}\left(H_N + \frac{1}{N+1}\right) = \\
&= H_{4(N+1)} - \frac{1}{2}H_{2(N+1)} - \frac{1}{2}H_{N+1}.
\end{aligned}$$

b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ converge per il criterio di Leibniz. In particolare, denotiamo
$$\sigma := \sum_{n=1}^{\infty} s_n = \lim_{N\to+\infty} S_N.$$
Osserviamo che $\sigma > 0$. Infatti, si verifica facilmente (ad esempio per induzione) che $S_N \geq \frac{1}{2}$ per ogni N (quindi $\sigma \geq \frac{1}{2}$).

Studiamo ora la convergenza della seconda serie: $\sum_{n=1}^{\infty} t_n$.
Innanzitutto, osserviamo che (usando le uguaglianze del punto a)):
$$\begin{aligned}
\lim_{N\to+\infty} T_{3N} &= \lim_{N\to+\infty} \left(H_{4N} - \frac{1}{2}H_{2N} - \frac{1}{2}H_N \right) = \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left[(H_{4N} - H_{2N}) + \frac{1}{2}(H_{2N} - H_N) \right] = \\
&= \lim_{N\to+\infty} \left[S_{4N} + \frac{1}{2}S_{2N} \right] = \\
&= \sigma + \frac{1}{2}\sigma = \\
&= \frac{3}{2}\sigma.
\end{aligned}$$
Inoltre si verifica facilmente che ($[\,\cdot\,]$ denota la parte intera):
$$T_{3\,[\frac{N}{3}]} \leq T_N \leq T_{3\,([\frac{N}{3}]+1)},$$
Usando il Teorema dei carabinieri possiamo concludere che
$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \lim_{N\to+\infty} T_N = \frac{3}{2}\sigma.$$

Esercizio svolto 5. Discutere il comportamento delle seguenti serie numeriche al variare del parametro x:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n}$, $x \in \mathbb{R}$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$;

c) $\sum_{n=1}^{\infty} n^x x^n$, $x \in \mathbb{R}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin x^n}{n+x^{2n}}$, $x \in \mathbb{R}$;

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}}$, $x > 1$.

Soluzione.

a) Studiamo la convergenza assoluta:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n!x^n}{n^n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!|x|^n}{n^n}.$$

Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\,|x|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,|x|^n} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}|x| = \\ &= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}|x| = \\ &= \frac{|x|}{e}.\end{aligned}$$

Quindi, se $|x|<e$ la serie converge assolutamente.

Dimostriamo ora che se $|x|\geq e$ la serie non può convergere in quanto non è verificata la condizione necessaria di Cauchy. Infatti, sia $a_n=\frac{n!x^n}{n^n}$. Dimostriamo che $a_n\not\to 0$ per $n\to+\infty$. Infatti, poiché $|x|\geq e$ ed usando il fatto che $(1+\frac{1}{n})^n\leq e$ per ogni n, si ottiene:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\geq\frac{|x|}{e}\geq 1.$$

Quindi la successione $|a_n|$ è una successione crescente di numeri reali positivi. Ovviamente non può convergere a zero.

Riassumendo:
– la serie converge assolutamente per $|x|<e$;
– la serie non converge per $|x|\geq e$. In particolare, diverge positivamente per $x\geq e$.

b) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x^n(1-x)}{n}=\begin{cases}0 & \text{se } |x|\leq 1\\ -\infty & \text{se } x>1\\ \nexists & \text{se } x<-1.\end{cases}$$

Quindi la serie non può convergere se $|x|>1$ (in particolare diverge negativamente se $x>1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $|x|\leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x^n(1-x)}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^n(1-x)}{n}.$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n(1-x)}{n}}=\begin{cases}|x| & \text{se } x\neq 1\\ 0 & \text{se } x=1.\end{cases}$$

Quindi la serie converge assolutamente se $x\in(-1,1]$ (osserviamo che per $x=1$ la serie è identicamente nulla).

Vediamo che succede per $x=-1$. La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{n}.$$

Questa serie non converge assolutamente, ma converge semplicemente (Criterio di Leibniz).

Riassumendo:
– la serie converge assolutamente per $x \in (-1, 1]$;
– la serie converge semplicemente ma non assolutamente per $x = -1$;
– la serie non converge per $|x| > 1$. In particolare, diverge negativamente per $x > 1$.

c) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} n^x\, x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } x = -1 \\ \nexists & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Quindi la serie non può convergere se $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ (in particolare diverge positivamente se $x \geq 1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $x \in [-1, 1)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^x\, x^n| = \sum_{n=1}^{\infty} n^x\, |x|^n.$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^x\, |x|^n} = |x|.$$

Quindi la serie converge assolutamente se $|x| < 1$.

Vediamo che succede per $x = -1$. La serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}.$$

Questa serie non converge assolutamente, ma converge semplicemente (Criterio di Leibniz).

Riassumendo:
– la serie converge assolutamente per $x \in (-1, 1)$;
– la serie converge semplicemente ma non assolutamente per $x = -1$;
– la serie non converge per $x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$. In particolare, diverge positivamente per $x > 1$.

d) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1 + nx^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| \leq 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x < -1. \end{cases}$$

Quindi la serie non può convergere se $|x| > 1$ (in particolare diverge positivamente se $x > 1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $|x| \leq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{1 + nx^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{1 + nx^2}.$$

Applichiamo il criterio della radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{1+nx^2}} = |x|.$$

Quindi la serie converge assolutamente per $|x| < 1$.

Vediamo che succede per $x = \pm 1$.

– Per $x = 1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n} = +\infty.$$

– Per $x = -1$ la serie diventa:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n}.$$

Questa serie non converge assolutamente, ma converge semplicemente (Criterio di Leibniz).

Riassumendo:

– la serie converge assolutamente per $|x| < 1$;
– la serie converge semplicemente ma non assolutamente per $x = -1$;
– la serie diverge positivamente se $x = 1$;
– la serie non converge per $|x| > 1$. In particolare, diverge positivamente per $x > 1$.

e) Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \sin x^n}{n + x^{2n}} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \\ \sin 1 & \text{se } x = 1 \\ \nexists & \text{se } x = -1. \end{cases}$$

Quindi la serie non può convergere se $x = \pm 1$ (in particolare diverge positivamente se $x = 1$).

Studiamo la convergenza assoluta quando $x \neq \pm 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{n \sin x^n}{n + x^{2n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin |x|^n}{n + x^{2n}}.$$

Se $|x| > 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin |x|^n}{n + x^{2n}} \quad &\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + x^{2n}} \leq \\ &\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^{2n}} = \\ &\leq \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{x^2} \right)^n < +\infty \end{aligned}$$

(quest'ultima serie converge, ad esempio, per il criterio della radice). Quindi, la serie converge assolutamente per $|x| > 1$.

Se $|x| < 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin |x|^n}{n + x^{2n}} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n + x^{2n}} |x|^n \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |x|^n < +\infty\end{aligned}$$

(quest'ultima serie converge, ad esempio, per il criterio della radice). Quindi, la serie converge assolutamente per $|x| < 1$.

Riassumendo:
- la serie converge assolutamente per $x \neq \pm 1$;
- la serie non converge per $|x| = \pm 1$. In particolare, diverge positivamente per $x = 1$.

f) Osserviamo innanzitutto che si tratta di una serie a termini positivi. Cominciamo col verificare la condizione necessaria:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} = \begin{cases} 0 & \text{se } x > e \\ 1 & \text{se } x = e \\ +\infty & \text{se } 1 < x < e \end{cases}$$

Quindi la serie diverge positivamente se $1 < x \leq e$.

Studiamo la convergenza quando $x > e$. Il termine $\frac{1}{(\log x)^{\log n}}$ è positivo e decrescente; quindi, possiamo applicare il criterio di condensazione di Cauchy:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log x)^{\log n}} \quad \sim \quad & \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(\log x)^{\log 2^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(\log x)^{n \log 2}} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(\log x)^{\log 2}} \right]^n = \begin{cases} < +\infty & \text{se } x > e^{2^{\frac{1}{\log 2}}} \\ +\infty & \text{se } x \leq e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}. \end{cases}\end{aligned}$$

Riassumendo:
- la serie converge assolutamente per $x > e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}$;
- la serie diverge positivamente per $1 < x \leq e^{2^{\frac{1}{\log 2}}}$.