Appello A di AM110 - 9/1/2013 Soluzioni

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Esercizio 1 Poiché $\frac{n^4-16}{n^4+1} = 1 - \frac{17}{n^4+1} \to 1$ per $n \to +\infty$ in maniera crescente e $\frac{n^4-16}{n^4+1} \geq 0$ per $n \geq 2$, abbiamo che $\cos(-\frac{15}{4}\pi) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ per $n = 1$ e $0 < \cos(\frac{n^4-16}{n^4+1}\frac{\pi}{2}) \leq 1$ per $n \geq 2$. Otteniamo quindi che $\inf A = 0$ e $\sup A = \max A = 1$ (raggiunto per $n = 2$).

Esercizio 2 Abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n\log(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1})} &= \lim_{n\to+\infty} n e^{\log(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1})} = \lim_{n\to+\infty} n(\sqrt{n^4+n}-\sqrt{n^4+1}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} n\frac{n-1}{\sqrt{n^4+n}+\sqrt{n^4+1}} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

dal limite notevole $(1+\frac{1}{n})^n \to e$ per $n \to +\infty$.

Esercizio 3 Osservando che

$$0 < \sqrt{n^2+2n} - n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} < 1,$$

otteniamo che

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+2n}-n\right] = 0$$

Esercizio 4 Abbiamo che

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt{1+\sin^2 x}}{\tan x\ln(1+x)} &= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin^2 x}{x^2}\right)\frac{\cos x}{\sqrt{\cos x}+\sqrt{1+\sin^2 x}}\frac{x}{\sin x}\frac{x}{\ln(1+x)} \\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

dai limiti notevoli su seno, coseno e logaritmo.

Esercizio 5 Fissato $x \in \mathbb{R}$, notiamo che $1 - \frac{x}{n} > 0$ per n grande. Siccome $|1-\frac{x}{n}|^{n\ln n} = [(1-\frac{x}{n})^{-\frac{n}{x}}]^{-x\ln n}$ si comporta come $e^{-x\ln n} = n^{-x}$ e $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ come $\frac{1}{\sqrt{n}}$ per $n \to +\infty$, dal criterio asintotico la serie in esame ha lo stesso comportamento della serie armonica di esponente $x + \frac{1}{2}$, convergendo quindi per $x > \frac{1}{2}$ e divergendo altrimenti.

Esercizio 6 La disuguaglianza $a_{n+1} = \max\{\frac{1}{4}, a_n^2\} \geq a_n$ vale se $a_n \leq \frac{1}{4}$ oppure $a_n \geq 1$. Per costruzione $a_n \geq \frac{1}{4}$ per ogni n e , se $\alpha > 1$, per induzione si mostra che $a_n > 1$ per ogni n. Quindi, se $\alpha > 1$ la successione a_n cresce ad un limite l che, se finito, soddisfa $l = \max\{\frac{1}{4}, l^2\}$. Essendo le uniche soluzioni $l = \frac{1}{4}, 1$, otteniamo che $a_n \to +\infty$ per $n \to +\infty$ se $\alpha > 1$. Se $\alpha = 1$ la successione $a_n \equiv 1 \to 1$ per $n \to +\infty$. Se $\alpha < 1$, la successione a_n soddisfa $a_n < 1$ per induzione, e quindi a_n decresce al limite $l = \frac{1}{4}$.