

Appello A di AM110 - 15/1/2014

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Gli studenti interessati al recupero di uno dei due esoneri devono svolgere in due ore solo la parte corrispondente, tenendo presente che i punteggi saranno poi moltiplicati per un fattore $\frac{3}{2}$. Gli altri studenti avranno invece tre ore di tempo per il compito, svolgendo a scelta SOLO 3 temi e 5 esercizi.

Parte I

Tema 1 [5 punti] Dati $0 < a < b$, provare che esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r \in (a, b)$.

Tema 2 [5 punti] Dopo aver fornito la definizione di punto di accumulazione, enunciare e dimostrare il Teorema di Bolzano-Weierstrass.

Esercizio 1 [3 punti] Determinare estremo inferiore/superiore, discutendo se si tratta di massimo /minimo, dell'insieme

$$A = \left\{ \cos \left(\frac{n^4 - 16\pi}{n^4 + 1} \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Esercizio 2 [3 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n \log(\sqrt{n^4+n} - \sqrt{n^4+1})}.$$

Esercizio 3 [3/4 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{n^2 + 2n} - n \right],$$

dove $[\cdot]$ indica la parte intera.

Parte II

Tema 3 [5 punti] Definire la proprietà di compattezza per insiemi, e provare che gli insiemi chiusi e limitati sono tutti e soli gli insiemi compatti in \mathbb{R} .

Tema 4 [5 punti] Definire l'uniforme continuità e discutere l'uniforme continuità di funzioni continue su insiemi compatti.

Esercizio 4 [3 punti] Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{1 + \sin^2 x}}{\tan x \ln(1 + x)}.$$

Esercizio 5 [3 punti] Discutere la convergenza della seguente serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \left| 1 - \frac{x}{n} \right|^{n \ln n}.$$

Esercizio 6 [3/4 punti] Al variare di $\alpha \geq 0$ discutere la convergenza della successione a_n definita per ricorrenza come

$$a_0 = \alpha, \quad a_{n+1} = \max\left\{\frac{1}{4}, a_n^2\right\}.$$