Appello B di AM110 - 5/2/2014

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tema 1 [5 punti] Dato $p > 0$, provare che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, discutendone il legame con la continuitá della funzione p^x.

Tema 2 [5 punti] Dopo aver definito il concetto di continuitá, enunciare e provare il Teorema degli zeri per funzioni continue. Qual è la conseguenza principale?

Tema 3 [5 punti] Definire l'uniforme continuitá e discutere l'uniforme continuitá di funzioni continue su $[0, +\infty)$ con un asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

Esercizio 1 [3 punti] Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) \cos(\frac{1}{n}) \sin(\frac{1}{n}).$$

Esercizio 2 [3 punti] Determinare il limite della seguente successione a_n definita per ricorrenza come:

$$a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2, \quad a_0 = \alpha \geq 0.$$

Esercizio 3 [6 punti] Calcolare i seguenti limiti:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)^n \sin(\frac{7n}{(n+1)!})}{2^n + (n+2)^n}, \qquad \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{\log(2-\cos x)}{x(\sqrt{\ln^2 x+1}-1)\sin x}}.$$

Esercizio 4 [3 punti] Al variare di α, $\beta \in \mathbb{R}$, discutere l'uniforme continuitá o meno in $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + 2 & x \in (-\infty, 0] \\ \frac{(\sin(2x)-\sin x+3\tan x)(1-\cos x)}{(\tan^2 x+x^3)(e^x-1)} & x \in (0, \frac{\pi}{2}) \\ \beta x + 1 & x \in [\frac{\pi}{2}, +\infty). \end{cases}$$