

## II Esonero di AM110 - 19/12/2013

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

**Tema 1** [5 punti] Dopo averne dato la definizione, enunciare e dimostrare la caratterizzazione del massimo/minimo limite. Quali relazioni ci sono tra massimo/minimo limite e l'eventuale limite di una successione?

**Tema 2** [5 punti] Enunciare e provare il Teorema di Weierstrass per funzioni continue su insiemi compatti.

**Tema 3** [5 punti] Provare il criterio di Cauchy sulla completezza di  $\mathbb{R}$  e discutere la condizione necessaria per la convergenza di una serie. Mostrare con un esempio che tale condizione non è sufficiente.

**Esercizio 1** [3 punti] Calcolare, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}}{x} \right)^{\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\log^2(1 + \frac{1}{x})}}.$$

**Esercizio 2** [3 punti] Determinare il limite della seguente successione  $a_n$  definita per ricorrenza come:

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}, \quad a_0 \geq 0.$$

**Esercizio 3** [6 punti] Discutere la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro  $x$  nell'insieme specificato in parentesi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 + \frac{x}{n})^{n^2}}{n(\log n)^2} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \left( \frac{n \tan^3(\frac{x}{n})}{2(1 - \cos \frac{x}{n})} \right)^n \quad (0 < |x| < \frac{\pi}{2})$$

**Esercizio 4** [3 punti] Discutere la compattezza dell'insieme

$$A = \{1 \leq |x| \leq 2\} \cup \left\{ (-1)^n \frac{\sqrt{9n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 5}}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$