

1. Alcune conseguenze del teorema del valor medio.

Sia f continua in $[a, b]$ e derivabile nei punti interni.

- $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ é costante in $[a, b]$.

Infatti, se $x_0, x \in (a, b)$, esiste, per Lagrange, $\xi \in (a, b)$ tale che $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0$.

NOTA $f(x) := \frac{|x|}{x}$ se $x \neq 0$ ha derivata nulla in ogni punto ma non é costante!

- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ é non decrescente in $[a, b]$.

Infatti, se $x_1 \leq x_2, x_1, x_2 \in (a, b)$, esiste, per Lagrange, $\xi \in (a, b)$ tale che $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geq 0$.

- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ é strettamente crescente in $[a, b]$. In particolare, é invertibile in $[a, b]$.

NOTA $f(x) := -\frac{1}{x}$ ha derivata positiva in ogni $x \neq 0$ ma non é crescente!

- f é localmente Lipschitziana in (a, b) , cioè é Lip in ogni sottointervallo chiuso e limitato $[a', b']$ di (a, b) :

$$\exists k > 0 : |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|, \quad \forall x, y \in [a', b']$$

Segue da Lagrange+ Weierstrass (applicato a f' in $[a', b']$): $k = \sup_{x \in [a', b']} |f'(x)|$.

- Se f é derivabile in (a, b) e continua in $[a, b]$, ed esiste inoltre $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$, allora esiste anche $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ ed ha lo stesso valore. Infatti:

$$\forall x \in (a, b) \exists \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi(x)) \rightarrow_{x \rightarrow a^+} \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$$

- **Teorema di Darboux.** Se f é derivabile in (a, b) , f' ha, in (a, b) la proprietá del valore intermedio.

Prova. Se, ad esempio, f' ha segno diverso in $x_1, x_2, a < x_1 < x_2 < b$, diciamo $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$, f ha allora un minimo interno ad $[x_1, x_2]$, ove necessariamente la derivata di f si annulla.

2. Le regole di De L'Hopital Siano f, g derivabili in (a, b) , $g(x)g'(x) \neq 0 \forall x$.

I Regola Siano f, g infinitesime in a . Allora,

\exists (finito o no) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e i due limiti sono uguali.

Prova. Prolunghiamo con continuità f, g fino ad a , ponendo $f(a) = g(a) = 0$. Sia quindi $x \in (a, b)$. Per il Teorema di Cauchy (e poi perché $\xi(x) \rightarrow_{x \rightarrow a^+} a$),

$$\exists \xi(x) \in (a, x) : \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi(x))}{g'(\xi(x))} \rightarrow_{x \rightarrow a^+} \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

II Regola. Sia $\lim_{x \rightarrow a^+} |g(x)| = +\infty$. Allora,

\exists (finito o no) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e i due limiti sono uguali.

I Prova (con la regola di Cesaro). Sia $x_n \in (a, b)$, strettamente decrescente ad a , cosicché $g(x_n)$ diverge in modo monotono. Per il teorema degli accrescimenti finiti, esiste $\xi_n \in (x_{n+1}, x_n)$ tale che $\frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}$. Siccome $\xi_n \rightarrow a^+$,

$$\lim_n \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{g(x_{n+1}) - g(x_n)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dalla regola di Cesaro segue che anche $\lim \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$ esiste ed ha lo stesso valore.

II Prova (senza Cesaro). Sia, per semplicità, $L := \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ finito, e quindi, $\forall \epsilon > 0 \exists t_\epsilon > a : \quad \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| \leq \epsilon$ in $(a, t_\epsilon]$; poi, $\forall x \in (a, t_\epsilon) \exists \xi_{t_\epsilon, x} \in (x, t_\epsilon)$ tale che:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(t_\epsilon)}{g(x) - g(t_\epsilon)} \frac{g(x) - g(t_\epsilon)}{g(x)} + \frac{f(t_\epsilon)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_{t_\epsilon, x})}{g'(\xi_{t_\epsilon, x})} \frac{g(x) - g(t_\epsilon)}{g(x)} + \frac{f(t_\epsilon)}{g(x)}$$

Ora, sia x_ϵ tale che $\left| \frac{g(t_\epsilon)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(t_\epsilon)}{g(x)} \right| < \epsilon$ per $x \in (a, x_\epsilon)$. Dunque

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq \left| \frac{f'(\xi_{t_\epsilon, x})}{g'(\xi_{t_\epsilon, x})} - L \right| + 2L \left| \frac{g(t_\epsilon)}{g(x)} \right| + \left| \frac{f(t_\epsilon)}{g(x)} \right| \leq \epsilon + (1 + 2L)\epsilon$$

NOTA Si può prendere $a = \pm\infty$. Infatti, posto $y = \frac{1}{x}$, troviamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2}}{g'\left(\frac{1}{y}\right) \frac{1}{y^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. DERIVATE DI ORDINE SUPERIORE E FORMULA DI TAYLOR

Sia f derivabile in (a, b) . Se f' é a sua volta derivabile in (a, b) , si dice che f é derivabile due volte in (a, b) , e si scrive

$$f''(x) := (f')'(x), \text{ od anche, al posto di } f'', \quad D^2 f, \quad \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Piú in generale, $f^{(n)}$, D^n , $\frac{d^n f}{dx^n}$, derivata n-esima, o di ordine n di f , indica, se esiste, la derivata della derivata $n-1$ -esima, tutte le volte che questa esiste.

Una funzione si dice di classe $C^k([a, b])$ se ha derivate in ogni punto di $[a, b]$ fino all'ordine k , e $D^k f$ é continua. Nel seguito, le funzioni che incontreremo saranno derivabili tante volte quanto occorre.

I polinomi di Taylor

Sia $n \in \mathbf{N}$. Sia $x_o \in \mathbf{R}$, f derivabile n volte in x_o . Il polinomio di grado n in h

$$P_n(x_o; h) := f(x_o) + f'(x_o)h + \frac{1}{2}f''(x_o)h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}h^n$$

si dice polinomio di Taylor di ordine n per f in x_o . Scriveremo anche $h = x - x_o$ e

$$P_n(x_o; x) := f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2}f''(x_o)(x - x_o)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n$$

$$R_n(x_o; h) := f(x_o + h) - P_n(h) \quad \text{od anche} \quad R_n(x_o; x) := f(x) - P_n(x_o; x)$$

Tale funzione descrive l'errore che si commette sostituendo ad $f(x)$ il valore del polinomio di Taylor in x .

$$\text{NOTA} \quad D^k f(x_o) = D^k P_n(x_o; x_o) \quad \forall k = 0, 1, \dots, n.$$

La formula di Taylor con il resto secondo Peano

$$R_n(x_o; x) = o((x - x_o)^n)$$

ovvero

$$f(x_o+h) = P_n(x_o; h) + R_n(x_o; h) = f(x_o) + f'(x_o)h + \frac{1}{2}f''(x_o)h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}h^n + o(h^n)$$

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{1}{2}f''(x_o)(x - x_o)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_o)}{n!}(x - x_o)^n + o((x - x_o)^n)$$

Prova. Segue dalla regola di De L'Hopital, applicata a $\frac{R_n(x_o; x)}{(x-x_o)^n} = \frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_o)^n}$, tenendo conto che $f(x_o) - P_n(x_o) = \dots = f^{(n)}(x_o) - P_n^{(n)}(x_o) = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_o)^n} = \dots = \lim_{x \rightarrow x_o} \frac{f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_o) - P_n^{(n)}(x_o)}{n!} = 0$$

(ovvero, una funzione che si annulli in x_o insieme alle sue prime n derivate é, in x_o , un $o(x - x_o)^n$).

NOTA É facile vedere che il polinomio di Taylor $P_n(x_o; x)$ é l'unico polinomio di grado n che approssima f in x_o a meno di un errore di ordine superiore all' n -esimo:

$$f(x_o + h) - Q_n(h) = o(h^n) \Rightarrow Q_n = P_n$$

Infatti, é allora $A_n := P_n - Q_n = o(h^n)$. Se $A_n(h) = a_o h^n + a_1 h^{n-1} + \dots + a_{n-1} h + a_n$. Da $A_n(h) \rightarrow 0$ al tendere di h a zero, segue $a_n = 0$; da $\frac{A_n(h)}{h} \rightarrow 0$ al tendere di h a zero, segue allora $a_{n-1} = 0$, e quindi $A_n(h) = a_o h^n + \dots + a_2 h^2$ da cui $a_2 = 0$ perché $A_n(h)h^{-2} \rightarrow 0$ al tendere di h a zero, e cosi via. Dunque $Q_n = P_n$.

Esempi (di formule di 'Mac Laurin': $x_o = 0$).

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

Per sostituzione, si possono ottenere, a partire da sviluppi noti, nuovi sviluppi:

$$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$$

Di qui, tenendo conto che $\frac{1}{1+x^2}$ é la derivata di $\arctan x$, si ottiene lo sviluppo

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

La formula di Taylor con il resto secondo Lagrange

La formula di Taylor con il resto secondo Peano generalizza la formula

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + o((x - x_o))$$

che descrive la buona approssimabilità, mediante funzioni lineari, delle funzioni derivabili. La formula (di Taylor) fornisce infatti, per funzioni con molte derivate, la miglior approssimazione attorno ad un punto mediante polinomi di grado alto. Tale formula, che fornisce, ad n fissato, una proprietà qualitativa del resto al tendere di x a x_o , è di grande utilità, ad esempio, nel calcolo di limiti (in alternativa all'uso della I formula di De L'Hopital).

Qui intendiamo generalizzare, per funzioni con molte derivate, il Teorema di Lagrange. Si otterrà, ad x fissato, una stima quantitativa del resto in dipendenza da n , stima utile per passare al limite, nella formula di Taylor, per n che va all'infinito ed ottenere quindi una rappresentazione di $f(x)$ come somma di una serie, la serie di Taylor di f .

Lemma Sia $\phi \in C^{n+1}([0, 1])$. Allora esiste $\xi \in (0, 1)$ tale che

$$\phi(1) = \phi(0) + \phi'(0) + \dots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\phi^{(n+1)}(\xi)}{n+1!}$$

Prova. Basta applicare il teorema degli accrescimenti finiti alle funzioni

$$f(t) := \phi(t) + (1-t)\phi'(t) + \frac{(1-t)^2}{2!}\phi''(t) + \dots + \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n)}(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(1-t)^k}{k!}\phi^{(k)}(t)$$

$$g(t) := -\frac{(1-t)^{n+1}}{n+1!} \quad \text{giacché} \quad g(1) - g(0) = \frac{1}{n+1!} \quad \text{mentre}$$

$$f(1) - f(0) = \phi(1) - [\phi(0) + \phi'(0) + \dots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}]$$

$$\begin{aligned} f'(t) &= \phi'(t) + \left(\sum_{k=1}^n \frac{(1-t)^k}{k!}\phi^{(k)}(t) \right)' = \phi'(t) - \phi'(t) + [(1-t)\phi''(t) - (1-t)\phi''(t)] + \\ &+ \dots + \left[\frac{(1-t)^{k-1}}{k-1!}\phi^{(k)}(t) - \frac{(1-t)^{k-1}}{k-1!}\phi^{(k)}(t) \right] + \dots + \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t) \end{aligned}$$

cioè $f'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(t)$. Per quanto sopra e per il Teorema di Cauchy, troviamo $\xi \in (0, 1)$ tale che:

$$\frac{\phi(1) - [\phi(0) + \phi'(0) + \dots + \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!}]}{\frac{1}{n+1!}} = \frac{f(1) - f(0)}{g(1) - g(0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{\frac{(1-\xi)^n}{n!}\phi^{(n+1)}(\xi)}{\frac{(1-\xi)^n}{n!}}$$

Proposizione (il resto secondo Lagrange)

Sia $f \in C^{n+1}(x - \delta, x + \delta)$. Allora, se $|h| < \delta$ esiste $\theta = \theta(h) \in (0, 1)$ tale che

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{n+1!}h^{n+1}$$

Prova. Posto $\phi(t) := f(x+th)$, risulta

$$\phi(1) = f(x+h), \quad \phi(0) = f(x), \quad \phi^{(k)}(0) = f^{(k)}(x)h^k$$

Allora la formula del Lemma applicata a ϕ dá la tesi.

Un'applicazione della formula di Talor allo studio dei massimi/ minimi, locali liberi di funzioni regolari

Sia $f \in C^\infty$ su di un certo intervallo $(x_o - \delta, x_o + \delta)$. Sappiamo che

$$f(x_o) \leq f(x) \quad \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \quad \Rightarrow \quad f'(x_o) = 0$$

e lo stesso se x_o é punto di massimo (locale) libero.

Valgono le seguenti condizioni perché x_o sia/non sia di massimo o di minimo:

Se $f^{(k)}(x_o) = 0 \quad \forall k < 2n+1$ e $f^{(2n+1)}(x_o) \neq 0$ allora x_o non é né di massimo né di minimo (locale) libero (si tratta quindi di un flesso: la retta tangente in $(x_o, f(x_o))$ 'attraversa' il grafico).

Se $f^{(k)}(x_o) = 0 \quad \forall k < 2n$ e $f^{(2n)}(x_o) > 0 (< 0)$ allora x_o é di minimo (rispettivamente, di massimo).

Ciò segue dalla formula di Taylor:

$$f(x_o+h) = f(x_o) + \left[\frac{f^{(m)}(x_o)}{m!} + o(1) \right] h^m$$

giacché, se m é dispari, $f(x_o+h) - f(x_o)$ cambia di segno insieme ad h , mentre, se m é pari, $f(x_o+h) - f(x_o)$ ha, per h piccolo, segno costante, quello di $f^{(m)}(x_o)$. Notiamo che lo stesso argomento dice che 'condizione necessaria perché un punto stazionario x_o (cioé tale che $f'(x_o) = 0$) sia punto di minimo (locale) libero é che la prima derivata non nulla in x_o (se esiste) sia di ordine pari.