AM120: Settimana 9

INTEGRAZIONE SU INSIEMI MISURABILI

Definizione di insieme misurabile e della sua misura Diremo che $E \subset \mathbf{R}$ é misurabile se χ_E é integrabile e scriveremo

$$\Sigma := \{E \subset \mathbf{R} : \quad \chi_E \quad \text{é integrabile}\}$$

$$|E| = \text{misura di E} := \int_{\mathbf{R}} \chi_E \qquad \forall E \in \Sigma$$

NOTA la caratterizzazione: detto che $N \subset \mathbf{R}$ *ha misura nulla in senso stretto* $\Leftrightarrow \quad \forall \epsilon > 0,\ \exists p \in \mathbf{N},\ \exists\, I_j^\epsilon,\ j = 1, \ldots, p$ *tali che* $\mathbf{N} \subset \cup_j I_j^\epsilon$ *e* $\sum_j l(I_j^\epsilon) \leq \epsilon$

allora $\qquad E \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad E$ é limitato e ∂E ha misura nulla in senso stretto.

Infatti, χ_E é integrabile sse E é limitato e $\forall \epsilon > 0,\ \exists\, (I_j^\epsilon)$ partizione tale che

$$\epsilon \geq S(\chi_E, I_j^\epsilon) - s(\chi_E, I_j^\epsilon) = \sum_j [\sup_{I_j} \chi_E - \inf_{I_j} \chi_E] l(I_j) = \sum_{\{j:\ \sup_{I_j} \chi_E = 1,\, \inf_{I_j} \chi_E] l(I_j^\epsilon) = 0\}} l(I_j^\epsilon)$$

Siccome $\sup_{I_j^\epsilon} \chi_E = 1 \quad \Leftrightarrow E \cap I_j^\epsilon \neq \emptyset$ e $\inf_{I_j^\epsilon} \chi_E = 0 \quad \Leftrightarrow E \cap (I_j^\epsilon)^c \neq \emptyset$, vediamo che, appunto, $E \in \Sigma$ se e solo se E é limitato e la sua frontiera $\partial E := \{x : \quad E \cap (x - \delta, x + \delta) \neq \emptyset \neq E^c \cap (x - \delta, x + \delta) \quad \forall \delta > 0\}$ é di misura nulla in senso stretto.

La classe degli insiemi misurabili é un ' 'algebra' su cui la misura é funzione additiva:

siccome $\quad \chi_{A \cap B} = \chi_A\, \chi_B, \quad \chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}, \quad \chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_B$, si ha che

$$A, B \in \Sigma \quad \Rightarrow \quad A \cap B,\ A \cup B,\ A \setminus B \in \Sigma$$

$$A, B \in \Sigma, \quad |A \cap B| = 0 \quad \Rightarrow \quad |A \cup B| = |A| + |B|$$

NOTA. Un insieme (limitato) di misura nulla non é necessariamente misurabile (ad esempio $\mathbf{Q} \cap [0, 1]$ é di misura nulla ma non é misurabile!). Invece, ogni insieme N di misura nulla in senso stretto é misurabile e $|N| = 0$, e viceversa. Infatti un ricoprimento di N con un numero finito di intervalli di misura complessiva minore di ϵ implica che $\overline{I}(\chi_N) \leq \epsilon$. E, viceversa, $\int \chi_E = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0 \exists I_j : \sum_j \sup_{I_j} l(I_j) \leq \epsilon$.

Sia $A \subset \mathbf{R}$. Diremo che $\quad$ *f é integrabile su A se $f\chi_A$ é integrabile* $\quad$ e scriveremo

$$\int_A f \ := \int_{\mathbf{R}} f\chi_A \qquad \text{(integrale di } f \text{ su A)}$$

NOTA. Se f é solo definita in A, la intenderemo definita su tutto $\mathbf{R}$ con $f \equiv 0$ in A^c.

Diremo che f é *localmente integrabile* se f é integrabile su $[-R, R]$ $\quad \forall\, R > 0$. Scriveremo

$$\mathcal{I}_{loc} := \{f \in b_0 : \quad f\chi_{[-R,R]} \quad \text{é integrabile} \quad \forall R\}$$

Siccome, se $E \in \Sigma$ ed R é tale che $E \subset [-R, R]$, risulta $\quad \chi_{[-R,R]}\,\chi_E = \chi_E,$ $\quad$ vediamo che una f *localmente integrabile é integrabile su ogni insieme misurabile.*

Le funzioni continue su $\mathbf{R}$ sono esempi di funzioni localmente integrabili. Sono localmente integrabili anche le funzioni monotone:

Integrabilitá locale delle funzioni monotone limitate.

Sia f limitata e monotona in $[a, b]$. Allora f é integrabile in $[a, b]$.

Prova. $\quad$ Possiamo supporre f non decrescente, cosicché

$$f(\inf I) \ \le \ \inf_I f, \qquad \sup_I f \ \le \ f(\sup I) \qquad \forall I \subset [a, b]$$

Sia $[a, b] = \bigcup_{j=1}^n I_j$ con $l(I_j) = \frac{b-a}{n}$, $\quad \sup I_j = \inf I_{j+1}$, $\quad$ e quindi

$$S(f, I_j) - s(f, I_j) = \sum_{j=1}^n \,[\sup_{I_j} f - \inf_{I_j} f]\; l(I_j) \le \ \frac{b-a}{n} \times$$

$$[f(\sup\ I_1) - f(\inf\ I_1)\ + f(\sup\ I_2)\ - f(\inf\ I_2) + \ldots + f(\sup\ I_n)\ - f(\inf\ I_n)\,]$$

$$= \ \frac{b-a}{n}\,[f(b) - f(a)] \ \le \ \epsilon \qquad \text{se} \quad n \quad \text{é grande.}$$

NOTA.
(i) $\quad E$ misurabile con $|E| = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E f = 0 \quad \forall f \in \mathcal{I}_{loc}$ perché $\quad |\int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_E| \le \sup\limits_{\mathbf{R}} |f| \int\limits_{\mathbf{R}} \chi_E = 0.$ $\quad$ In particolare, se f é integrabile, e $I = [a, b]$, $\quad a < b$, $\quad J = (a, b)$, allora $\quad \int\limits_I f = \int\limits_J f$, $\quad$ perché $\int\limits_I f = \int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_{[a,b]} = \int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_{(a,b)} + \int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_{\{a,b\}} = \int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_{(a,b)}$.
É $\quad \int\limits_I f = \int\limits_J f$ anche se $J = [a, b)$ o $J = (a, b]$.

Piú in generale, se $\quad f, g$ sono integrabili su $E \in \Sigma$ $\quad$ é vero che

$$(ii) \qquad N := \{x \in E : \quad f(x) \ne g(x)\} \in \Sigma \qquad e \qquad |N| = 0 \qquad \Rightarrow \quad \int_E f = \int_E g$$

giacché $\quad \int_E f - g = \int_E (f-g)|\chi_N = 0.$

Riassumiamo ora le proprietá dell'applicazione

$$\Sigma \times \mathcal{I}_{loc} \ \ni \ (E,f) \ \to \ \int_E f$$

Teorema. Siano $f, g \in \mathcal{I}_{loc}$, $\quad E, F \in \Sigma$. $\quad$ Allora

$(i) \quad \int\limits_E \alpha f + \beta g = \alpha \int\limits_E f + \beta \int\limits_E g \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ $\qquad$ **(linearitá)**

$(ii) \quad |E \cap F| = 0 \quad \Rightarrow \quad \int\limits_{E \cup F} f = \int\limits_E f \ + \ \int\limits_E g$ $\qquad$ **(additivitá)**

$(iii) \quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E f \geq 0$ $\qquad$ **(positivitá)**

$\qquad f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E f \geq \int\limits_E g$ $\qquad$ **(monotonia)**

$(iv) \quad |\int\limits_E f| \ \leq \ \int\limits_E |f| \ \leq \ |E| \times \sup\limits_E |f|$ $\qquad$ **(continuitá)**

Prova.
(i) Segue da $\quad \int (\alpha f + \beta g)\chi_E = \alpha \int f\chi_E + \beta \int g\chi_E$.
(ii) Infatti, $\quad \int\limits_{A \cap B} f = 0 \quad$ e quindi $\quad \int\limits_{A \cup B} f \ = \int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_{A \cup B} =$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}} f(\chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}) = \int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_A \ + \int\limits_{\mathbf{R}} f\chi_B + \int\limits_{A \cap B} f = \int\limits_A f \ + \int\limits_B f$$

(iii) La prima delle (iii) segue dalla definizione di integrale, mentre la seconda usa, in piú, la linearitá dell'integrale.
(iv) La prima diseguaglianza segue da $\quad -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \,\forall\, x \in E$. $\quad$ Infine,

$$|f(x)|\chi_E(x) \leq \sup_E |f(x)|\chi_E(x) \ \forall x \quad \Rightarrow \quad \int\limits_E |f| \ \leq \ \sup_E |f| \int \chi_E \leq \sup_E |f| \times |E|$$

Teorema della media $\quad$ Sia $I = [a,b]$. Siano f, g continue in I, $g(x) \geq 0 \forall x \in I$. Allora

$$\exists \xi \in I : \ \int_I fg \ = \ f(\xi) \int_I g \qquad \text{In particolare} \quad \exists \xi \in I : \ \int_I f \ = \ f(\xi) l(I)$$

Prova. f e g, prolungate a zero fuori di I, sono integrabili, e quindi sono integrabili su I. Per il teorema di Weierstrass, f é dotata di minimo e di massimo su I, e si ha $\quad (\min_I f) g(x)\chi_I(x) \leq f(x)g(x)\chi_I(x) \leq (\max_I f) g(x)\chi_I(x) \quad \forall x \in \mathbf{R}$. $\quad$ Quindi, passando agli integrali ed usando la linearitá,

$$\min_I f \int_I g \leq \int_I fg \leq \max_I f \int_I g$$

Ora, possiamo supporre $\int_I g > 0$ (altrimenti non c'e niente da dimostrare) e concludere che $\frac{\int_I fg}{\int_I g} \in [\min_I f, \max_I f]$. La tesi segue allora dal Teorema del valore intermedio.

Per la seconda parte, basta osservare che, presa $g \equiv 1$, $\int_I g = l(I)$

INTEGRALI ORIENTATI

Sia $a \leq b$, f una funzione integrabile. Scriveremo anche

$$\int_a^b f := \int_{\mathbf{R}} f\chi_{(a,b)}, \quad \int_b^a f := -\int_a^b f$$

Le proprietá viste finora per $I(f)$ si riscrivono in modo ovvio per gli integrali orientati. Notiamo ad esempio che $f \leq g, a > b \Rightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$.

Di fondamentale importanza é la seguente riformulazione della additivitá: se $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ é integrabile e $a, b, c \in \mathbf{R}$ allora

$$(\diamond) \qquad \int_a^b f + \int_b^c f + \int_c^a f = 0 \qquad (\diamond)$$

Infatti, se due tra a, b, c coincidono, tale relazione é vera per definizione. Altrimenti, uno dei tre é strettamente compreso tra gli altri due. Diciamo, per fissare le idee, che sia c ad essere compreso tra a e b. Quindi $(\diamond)$ si riscrive

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

che é vera perché

$$\int_a^b f = \int_{\mathbf{R}} f\chi_{[a,b]} = \int_{\mathbf{R}} f(\chi_{[a,c)} + \chi_{[c,b]}) =$$

$$= \int_{\mathbf{R}} f\chi_{[a,c)} + \int_{\mathbf{R}} f\chi_{[c,b]} = \int_a^c f + \int_c^b f$$

IL TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO

TFC 1.

Sia f é limitata e integrabile in $[a,b]$, $x_0 \in [a,b]$. La funzione

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

i) é definita e Lipschitziana (e quindi continua) in $[a,b]$

ii) é derivabile in $x \in (a,b)$, se f é continua in x, ed in tal caso $F'(x) = f(x)$

Dimostrazione. Usando l'additivitá dell'integrale, si ottiene

$$|F(x) - F(y)| = |\int_{x_0}^{x} f(t)dt - \int_{x_0}^{y} f(t)dt| = |\int_{y}^{x} f(t)dt| \leq \left(\sup_{[a,b]} |f|\right) |x-y|$$

$$F(x+h) = F(x) + \int_{x}^{x+h} f(t)dt + f(x)h - f(x) \int_{x}^{x+h} dt = F(x) + f(x)h + \int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt$$

e quindi, se f é continua in x, $|\int_{x}^{x+h} [f(t) - f(x)]dt| \leq |h| \sup_{\{t:|t-x|\leq|h|\}} |f(t) - f(x)| = \circ(|h|)$ e quindi F é derivabile in x con $F'(x) = f(x)$. Si puó quindi scrivere

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f(t)dt = f(x)$$

in ogni punto x in cui f é continua.

Corollario. Sia f continua in $[a,b]$. Allora f é dotata di primitiva in (a,b).

NOTA . Se φ, ψ sono derivabili ed f é continua, allora

$$\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

Infatti, se $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$, dal TFC e dalla regola della catena, segue $\frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(\varphi(x)) - F(\psi(x))] = F'(\varphi(x))\varphi'(x) - F'(\psi(x))\psi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$.