2014-AM120: Settimana 10

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO 2
(formula di Torricelli-Newton)

Sia $f \in C(I), I$ intervallo aperto. Sia $P' = f$ in $[a, b] \subset I$. Allora

$$\int_a^b f \; = \; P\,|_a^b \; := \; [P(b) - P(a)] \qquad \forall \; [a, b] \subset I$$

Dimostrazione. Sia $F(x) = \int_a^x f$. Da $F' \equiv P'$ in I, segue che $F(x) - P(x) = F(a) - P(a) = -P(a)$ $\forall x \in I$, e quindi $\int_a^b f \; = \; F(b) = P(b) - P(a)$.

Potremo quindi scrivere, per una funzione $f \in C^1([a, b])$,

$$\int_a^b \frac{df}{dx}\, dx \; = \; f|_a^b$$

NOTA. La formula di Torricelli-Newton richiede la continuitá di f in tutto $[a, b]$. D'altra parte una f discontinua in $[a, b]$ potrebbe non ammettere primitiva in $[a, b]$. Ad esempio, se $F(x) = |x|$ la sua derivata, in $x \neq 0$, é $f(x) := \frac{x}{|x|}$, che non ha primitiva in $I = [-1, 1]$. Tale f é integrabile in I ed il suo integrale é in effetti pari a $F(1) - F(-1) = 0$. Ma un'altra primitiva P di f in $I \setminus \{0\}$ potrebbe non differire da F per una costantea, ed in tal caso si avrebbe $0 = \int_{-1}^1 f \neq P(1) - P(-1)$.
Ugualmente, non é vero in generale che se F ha derivata discontinua in un intervallo $I = [a, b]$ allora $F(b) - F(a) = \int_a^b F'$, semplicemente perché F' potrebbe non essere integrabile, come é il caso per $F(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x^2}), F(0) = 0$.
Si puó tuttavia dimostrare che se f é derivabile in tutti i punti di I ed f' é integrabile in I allora vale Torricelli-Newton.

Alcuni integrali immediati .

$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt \; = \; \arctan x \qquad \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\, dt \; = \; \sin^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \cos^{-1} x, \quad |x| < 1$

$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\, dt \; = \; \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad x \in \mathbf{R}$

$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\, dt \; = \; \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}) \quad , \forall \; x > 1$

LA FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI .

Siano $f, g \in C^1([a,b])$. Allora

$$\int_a^b fg' = fg|_a^b - \int_a^b f'g$$

Dimostrazione. $\int_a^b fg' + f'g = \int_a^b (fg)' = fg|_a^b$.

ESEMPI di integrazione per parti.

$$\int_0^x \sin^2 t\, dt = \int_0^x \cos^2 t\, dt - \cos x \sin x \quad \Rightarrow \quad \int_0^x \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$$

$$\int_0^x \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$$

$$\int_0^x \sinh^2 t\, dt = -\int_0^x \cosh^2 t\, dt + \cosh x \sinh x \Rightarrow \int_0^x \sinh^2 t\, dt = \frac{1}{2}(\sinh x \cosh x - x)$$

$$\int_0^x \cosh^2 t\, dt = \frac{1}{2}(x + \sinh x \cosh x)$$

$$\int_1^x \log t\, dt = -\int_1^x dt + t \log t|_1^x = 1 - x + x \log x$$

$$\int_0^x \arctan t dt = -\int_0^x \frac{t}{1+t^2} dt + t \arctan t|_0^x = x \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

INTEGRAZIONE VIA CAMBIO DI VARIABILE .

Sia $\varphi \in C^1([\alpha, \beta])$. Sia f continua in $[a,b] := \{x = \varphi(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$. Allora

i) $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx$

Se di piú $\varphi'(t) > 0 \;\; \forall t \in [\alpha, \beta]$ e quindi $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ allora

ii) $\displaystyle\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$

Dimostrazione. $\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta}(\frac{d}{dt}\int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx)dt = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f\,|_{\alpha}^{\beta} = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f.$

Se di piú $\varphi'(t) > 0 \quad \forall t \in [\alpha,\beta]$, e quindi φ é invertibile in $[\alpha,\beta]$, posto $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, la formula i) si riscrive appunto come in ii)

ESEMPI di cambi di variabile

$$(i) \quad \int\limits_{0}^{x} 2t\cos(t^2)\,dt \overset{\tau=\varphi(t):=t^2}{=} \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \cos\tau\,d\tau = \sin x^2, \qquad \int\limits_{0}^{x} \sinh t\,\log(\cosh t)\,dt$$

$$\overset{\tau=\varphi(t):=\cosh t}{=} \int\limits_{\varphi(0)}^{\varphi(x)} \log\tau\,d\tau = \int\limits_{1}^{\cosh(x)} \log\tau\,d\tau = 1 - \cosh x + \cosh x\log(\cosh x)$$

$$(ii) \qquad \int\limits_{0}^{y} \sqrt{1-x^2}\,dx \overset{x:=\sin t}{=} \int\limits_{0}^{\sin^{-1} y} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}(\sin^{-1} y + y\sqrt{1-y^2})$$

(da cui $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$).

$$\int\limits_{1}^{x} \sqrt{t^2-1}\,dt \overset{t:=\cosh s}{=} \int\limits_{0}^{\cosh^{-1} x} \sinh^2 s ds =$$

$$= \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2-1} - \cosh^{-1} x) = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2-1} - \log(x+\sqrt{x^2-1})]$$

$$\int\limits_{0}^{x} \sqrt{t^2+1}\,dt \overset{t:=\sinh s}{=} \int\limits_{0}^{\sinh^{-1} x} \cosh^2 s ds = \frac{1}{2}(x\sqrt{1+x^2} + \sinh^{-1} x) =$$

$$= \frac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + \log(x+\sqrt{1+x^2})]$$

Simmetrie e cambi di variabile negli integrali

Funzioni pari, dispari. Sia f derivabile in $\mathbf{R}$. Si ha che

$$f \quad \text{pari} \quad \Rightarrow f'(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h} = -\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} = -f'(x)$$

$$f \quad \text{dispari} \quad \Rightarrow \quad f'(-x) = -(f(-x))' = -(-f(x))' = f'(x)$$

cioé, se f é pari *(dispari)* allora f' é dispari *(pari)*.
Usando il cambio di variabile $t = -s$, vediamo che vale anche il viceversa:

$f \in C(\mathbf{R})$ pari $\Rightarrow$ $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ é dispari (ed é anche l'unica primitiva dispari!).

In paricolare, $\int\limits_{-a}^{a} f = 2\int\limits_0^a f$

$f \in C(\mathbf{R})$ dispari $\Rightarrow$ $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ é pari. In particolare, $\int\limits_{-a}^{a} f = 0$.

Funzioni periodiche. Se f, derivabile in $\mathbf{R}$, é $T-$periodica (cioé $f(t+T) = f(t)\ \ \forall\, t$), allora f' é T-periodica:

$$f'(x+T) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+T+h) - f(x+T)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

É naturale chiedersi se valga il viceversa. In effetti

Se $f \in C(\mathbf{R})$ é T-periodica, allora $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ é T-periodica se e solo se $\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$ (le primitive di f sono T-periodiche se e solo se f é *a media nulla*).

Necessitá : $\int\limits_0^T f(t)\,dt = F(T) - F(0) = 0$. La sufficienza segue da

$\frac{d}{dx}\left[\int\limits_0^{x+T} f(t)dt - \int\limits_0^x f(t)dt\right] = f(x+T) - f(x) \equiv 0$ e quindi

$$F(x+T) - F(x) = F(T) - F(0) = \int_0^T f(t)\,dt$$

Usando il cambio di variabile, ne diamo una prova 'senza ipotesi di continuitá' su f:

Posto $t = T + s$, risulta $\int\limits_a^{a+T} f = \int\limits_a^T f + \int\limits_T^{a+T} f(t)\,dt = \int\limits_a^T f + \int\limits_0^a f(T+s)\,ds = \int\limits_0^T f \quad \forall a$ e quindi

$$\int_0^{x+T} f = \int_0^x f + \int_x^{x+T} f = \int_0^x f + \int_0^T f$$

Esercizio. Provare, usando il cambio di variabile $t := s + \frac{\pi}{2}$, che

$$\int_0^\pi \sin^2 t\,dt = \int_0^\pi \cos^2 t\,dt = \frac{\pi}{2}$$

INTEGRAZIONE PER PARTI: FORMULE ITERATIVE

1. Se $I_n(x) := \int_0^x t^n e^t \, dt,$ é $I_n(x) = x^n e^x - nI_{n-1}(x)$

2. Se $I_n(x) := \int_0^x t^n e^{-t} \, dt,$ é $I_n(x) = nI_{n-1}(x) - x^n e^{-x}$

3. Se $S_n(x) := \int_0^x \sin^n t \, dt,$ $C_n(x) := \int_0^x \cos^n t \, dt,$ é

$S_n(x) = (1 - \frac{1}{n})S_{n-2}(x) - \frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x,$

$C_n(x) = (1 - \frac{1}{n})C_{n-2} + \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x$

4. $S_{2n}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{4})\ldots(1-\frac{1}{2n})$ $S_{2n+1}(\frac{\pi}{2}) = (1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})\ldots(1-\frac{1}{2n+1}).$

Da 4. seguirá la **Formula di Wallis**:

$$\frac{\pi}{2} = [\frac{2\,4\,\ldots 2n}{3\,5\ldots(2n-1)}]^2 \frac{1}{2n+1} + O(\frac{1}{n})$$

5. Se $I_n(x) := \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \, dt,$ é $I_{n+1}(x) = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{x}{2n(1+x^2)^n}$

6.Se $I_n(x) := \int_0^x \frac{t^{n-1}}{(1+t^2)^{\frac{n+2}{2}}} \, dt,$ é $I_n(x) = \frac{n-2}{n} I_{n-2} - \frac{t^{n-2}}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}$

Esecuzione dei calcoli:

1. $\int_0^x t^n e^t dt = -n\int_0^x t^{n-1}e^t + x^n e^x$, 2. $\int_0^x t^n e^{-t} dt = n\int_0^x t^{n-1}e^{-t} - x^n e^{-x}$

3. $\int_0^x \sin^n t dt = \int_0^x \sin^{n-1} t \sin t dt = (n-1)\int_0^x \sin^{n-2} t \cos^2 t dt - \sin^{n-1} x \cos x$

$\Rightarrow n\int_0^x \sin^n t dt = (n-1)\int_0^x \sin^{n-2} t dt - \sin^{n-1} x \cos x$.

4.: segue da 3.

5. $\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = -\int_0^x t \frac{d}{dt}\frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \frac{t}{(1+t^2)^n}|_0^x = 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt + \frac{x}{(1+x^2)^n} =$

$2n\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} - \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} \Rightarrow 2n\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^{n+1}} dt = (2n-1)\int_0^x \frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{x}{(1+x^2)^n}.$

6. $I_n(x) = \int_0^x t^{n-2}\frac{d}{dt}[\frac{1}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} dt = \frac{n-2}{n}\int_0^x \frac{t^{n-3}}{(1+t^2)^{\frac{n}{2}}} dt - \frac{x^{n-2}}{n(1+t^2)^{\frac{n}{2}}}.$

Deduzione della Formula di Wallis.

Sia $S_j := S_j(\frac{\pi}{2})$. Si ha

$$S_{2n} = (1-\frac{1}{2n})S_{2n-2} = (1-\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n-2})S_{2n-4} =$$

$$(1-\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n})\dots(1-\frac{1}{4})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = (1-\frac{1}{2n})(1-\frac{1}{2n-2})\dots(1-\frac{1}{2})\frac{\pi}{2}$$

$$S_{2n+1} = (1-\frac{1}{2n+1})S_{2n-1} = (1-\frac{1}{2n+1})(1-\frac{1}{2n-1})S_{2n-3} =$$

$$(1-\frac{1}{2n+1})(1-\frac{1}{2n-1})\dots(1-\frac{1}{3})\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = (1-\frac{1}{2n+1})(1-\frac{1}{2n-1})\dots(1-\frac{1}{3})$$

e quindi

$$S_{2n} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t\;dt \;=\; \frac{\pi}{2}\,\frac{2n-1!!}{2n!!}, \qquad S_{2n+1} := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\;dt \;=\; \frac{2n!!}{2n+1!!}$$

e $S_{2n-1} \geq S_{2n} \geq S_{2n+1}$ (perché $\sin x \leq 1$) segue $\frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} \geq \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \geq 1$ da cui (la formula di Wallis e una stima asintotica per $S_n = C_n$)

$$1 \leq \frac{\pi}{2}\left[\frac{2n-1!!}{2n!!}\right]^2 (2n+1) \leq \frac{2n+1}{2n}$$

e quindi

$$\frac{\pi}{2}\left[\frac{2n-1!!}{2n!!}\right]^2 = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}), \qquad \pi = \left[\frac{2n!!}{2n-1!!}\right]^2\left[\frac{1}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right]$$

$$C_n = S_n = \sqrt{\frac{\pi}{2n}} + \circ(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Passaggio al limite sotto segno di integrale
(ovvero, 'continuitá dell'integrale')

Abbiamo appena visto che se $f_n(x) := (\sin x)^{2n}$, allora $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\,dt \to 0$. Siccome $f_n := (\sin x)^{2n} \to f(x) := \chi_{\frac{\pi}{2}}$ in $[0, \frac{\pi}{2}]$, e $\chi_{\frac{\pi}{2}}$ é integrabile con integrale uguale a zero, per tale successione di funzioni é vero che

$$\lim_n f_n \quad \text{é integrabile} \quad \text{e} \qquad \lim_n \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \lim_n f_n$$

É naturale chiedersi se questo sia un fatto generale, ovvero se, data f_n successione di funzioni integrabili in $[a,b]$ e convergente puntualmente ad f in $[a,b]$ sia vero che

(i) f é integrabile in $[a,b]$
(ii) e, se si, $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

La risposta alla (i) é in generale negativa.
Ad esempio, se $q_n \in \mathbf{Q}$ é una numerazione di $\mathbf{Q} \cap [0,1]$ e $f_n = \chi_{q_1,\dots,q_n}$, le f_n sono funzioni integrabili con integrale nullo, ma $\lim_n \chi_{q_1,\dots,q_n} = \chi_{\mathbf{Q}\cap[0,1]}$ che non é integrabile.
Un'altro tipico esempio é dato dalla successione di funzioni integrabili in $[0,1]$ $f_n(x) := \frac{1}{x}\,\chi_{[\frac{1}{n},1]}$ successione che converge in $[0,1]$ alla funzione non limitata $f(x) := \frac{1}{x}\,\chi_{\{0\}}$.
Ed anche l'affermazione (ii) é in generale falsa. Ad esempio, se $\alpha > 0$ $f_n = n^\alpha \chi_{(0,\frac{1}{n}]}$, allora $f_n(x) \to 0$ $\forall x \in [0,1]$ ma $\int_0^1 f_n = 1$ se $\alpha = 1$ mentre addirittura $\int_0^1 f_n = +\infty$ se $\alpha > 1$. Dunque $\int_0^1 f_n \to 0$ sse $\alpha < 1$.
Un altro esempio. Se $I_k = (\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$, $\alpha_k \in \mathbf{R}$, $k = 0,1,\dots$ $M_k := \alpha_{k+1} - \alpha_k$, $f_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} M_k\, 2^{k+1}\,\chi_{I_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{M_k}{l(I_k)}\,\chi_{I_k}$, $f_n(x) \to_n 0$ $\forall x \in [0,1]$ e $\int_0^1 f_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} M_k = \frac{\alpha_{n+1}-\alpha_0}{n}$, e questa successione puó avere qualsiasi comportamento!

Dunque la convergenza puntuale non basta per assicurare le (i)-(ii). Vediamo ora come (i)-(ii) valgono se la convergenza delle f_n é supposta uniforme.

Teorema di passaggio al limite sotto segno di integrale

Siano $f_n \in C([a,b])$ convergenti uniformemente ad f in $[a,b]$. Allora

$$f \quad \text{é integrabile} \qquad \text{e} \qquad \int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Infatti, f é continua in quanto limite uniforme di una successione di funzioni continue e

$$|\int_a^b f_n - \int_a^b f_n| \le (b-a)\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to_n 0$$

NOTA 1. É sufficente supporre le f_n anche solo integrabili. Infatti, dall'integrabilitá di f_n segue, per Lebesgue-Vitali, che $\mathcal{D}_n$, l'insieme dei punti di discontinuitá di f_n, é di misura nulla, e quindi $\cup_n \mathcal{D}_n$ ha misura nulla. Ma, in virtú dell'uniforme convergenza, l'insieme dei pinti di discontinuitá di f é contenuto in $\cup_n \mathcal{D}_n$ e quindi f é, per Lebesgue-Vitali, integrabile.

NOTA 2. L'ipotesi di uniforme convergenza su f_n puó essere fortemente indebolita, ed infatti sostituita con una ipotesi di 'equidominatezza', come vedremo piú avanti.

Formula di Taylor con il resto in forma integrale

Concludiamo con una estensione del Teorema del valor medio in forma integrale, fornita dal Teorema Fondamentale del Calcolo:

$$\varphi \in C^1([0,1]) \quad \Rightarrow \quad \varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt = \varphi(0) + \varphi'(p.i.)$$

Utilizzando iterativamente la formula di integrazione per parti, tale formula si puó estendere alle derivate di ordine superiore. Sia $\varphi \in C^\infty([0,1])$. Allora, per ogni naturale n, si ha

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt \quad (*)_n$$

Dimostrazione. Infatti, $\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt$: $(*)_1$ é vera.

Supponiamo $(*)_n$ vera. Mediante una integrazione per parti, otteniamo

$$\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}\varphi^{(n)}(t)dt = -\frac{1}{(n-1)!}\int_0^1 -\frac{(1-t)^n}{n}\varphi^{(n+1)}(t)dt - \frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n)}(t)|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n\varphi^{(n+1)}(t)dt + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)$$

Segue allora che $(*)_{n+1}$ é vera.