AM120 2013-2014: II ESONERO

TEMA 1. Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, limitata. Siano $a, b \in \mathbf{R}$, $a \leq b$.
1.1 Dare la definizione di integrabilitá e di integrale per $f\chi_{[a,b]}$, e mostrare che se f é monotona, oppure continua, allora $f\chi_{[a,b]}$ é integrabile. Provare infine che, se f é monotona, oppure continua, e $\int\limits_{\mathbf{R}} |f\chi_{[a,b]}| = 0$, allora $f \equiv 0$ in (a, b).
1.2. Dare la definizione di sottoinsieme misurabile di $\mathbf{R}$ e mostrare che la classe dei misurabili é chiusa rispetto all'unione, all'intersezione e alla differenza. Enunciare poi, e dimostrare, la proprietá di additivitá dell'integrale.
1.3 Provare che se $f \in C(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ allora $F(x) := \int_1^x f$ é definita e in $C^1((0, +\infty))$.
1.4 Sia $f \in C(\mathbf{R}\setminus\{0\})$. Dare la definizione di integrabilitá/assoluta integrabilitá di f in $\mathbf{R}$ e provare che se f é assolutamente integrabile allora $\int\limits_0^{\epsilon} |f| + \int\limits_{1/\epsilon}^{+\infty} |f| \to_{\epsilon\to 0^+} 0$.
1.5 Dedurre che $|f|$ integrabile in $\mathbf{R} \Rightarrow f$ é integrabile in $\mathbf{R}$ (in senso improprio). Discutere qualche esempio di f integrabile ma non assolutamente integrabile in $\mathbf{R}$.

TEMA 2. Sia $f_n \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ convergente ad f uniformemente su ogni $[a, b] \subset (0, +\infty)$. Supposto che esista g assolutamente integrabile in $(0, +\infty)$ tale che $|f_n(x)| \leq g(x)$ $\forall x \in (0, +\infty)$ e $\forall n \in \mathbf{N}$, provare che $\int_0^\infty |f| < +\infty$ e $\lim_n \int\limits_0^{+\infty} |f_n - f| = 0$. Illustrare con dei controesempi l'essenzialitá dell'ipotesi di equidominatezza. Dedurre, via TFC, che se anche le f_n' convergono uniformemente in ogni intervallo $[a, b] \subset (0, +\infty)$, allora $f \in C^1((0, +\infty))$ ed $f'(x) = \lim_n f_n'(x)$.

TEMA 3 . Sia $f_n \in C^\infty(\mathbf{R} \setminus \{0\})$ tali che $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{x\in[a,b]} |f_n(x)| < +\infty$ per ogni intervallo $[a, b] \subset (0, +\infty)$.
3.1 Provare che se $\int\limits_0^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_n| < +\infty$ allora $\int\limits_0^{\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^{\infty} f_n$
3.2 Sia $f_n(x) = a_n x^n$ ove $a_n \in \mathbf{R}$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é serie convergente. Provare che $f(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é definita e continua in $(-1, 1]$ e $\int\limits_0^1 f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$.
3.3 Supposto che $a_n = (-1)^n |a_n|$ provare che f é a integrale convergente in $[-1, 0]$ se e solo se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1} < +\infty$ ed infatti $\int\limits_{-1}^{0} f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n+1}$.

TEMA 4. Esponenziale complesso, periodicitá di $Re(exp(it))$ e formule di Eulero.

ESERCIZIO 1. Determinare, ove esiste, la primitiva che si annulla in $x = 0$ di

$$(i) \quad f(x) := (2-x)\log(x^2+8x+17) \qquad\qquad (ii) \quad g(x) := e^{-tx}\sin x$$

ove in (ii) t é un parametro reale.

ESERCIZIO 2. Discutere convergenza puntuale, totale e uniforme della seguente serie di funzioni:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log\left(1+\frac{|x|}{n}\right)$$

Posto $\quad D := \{x \in \mathbf{R} : \quad \text{la serie converge in } x\}, \quad$ sia

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} x^n \log\left(1+\frac{|x|}{n}\right), \qquad x \in D$$

Stabilire se tale funzione é

(i) continua in D (ii) derivabile nei punti interni di D
(iii) integrabile (eventualmente in senso improprio) in D

ESERCIZIO 3. Discutere, al variare di $\alpha \in \mathbf{R}$, la convergenza dell'integrale improprio:

$$\int_4^{\infty} x^4 \tan^{\frac{\alpha}{3}}\left(x^2\left(\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{3x^3}\right)\right)dx$$

ESERCIZIO 4. Calcolare, se esistono, i seguenti integrali

$$(i) \quad \int_{-1}^{\sqrt{6}-1} \frac{1}{x^2+2x+3}\,dx, \qquad\qquad (ii) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log x^2}{1+x^2}\,dx,$$

$$(iii) \quad \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin x dx$$

ove t in (iii) é un parametro reale.

ESERCIZIO 5. Provare, usando 3.3 del Tema 3 con $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, che

$$\int_{-1}^{1} \frac{\log(x+1)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^2}, \qquad \int_0^1 \frac{\log t}{t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$