Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 1 - 21 Febbraio 2014

1. Ricordiamo che

- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$;
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$;
- $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

e vediamo di applicarli agli esercizi proposti:

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(3x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\ln(3x+1)}\frac{6x}{6x} = \frac{2}{3} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{2x}\frac{3x}{\ln(3x+1)} = \frac{2}{3}$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{2x+\sin(7x)}{\tan(2x)} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x}{\tan(2x)} + \frac{\sin(7x)}{\tan(2x)}\right) = 1 + \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{\tan(2x)}\frac{14x}{14x} =$
$= 1 + \frac{7}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{7x}\frac{2x}{\tan(2x)} = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}$

(c) $\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x^2-1} =_{(\mathbf{y=x-1})} \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y^2+2y} = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y}\frac{1}{y+2} = \frac{1}{2}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x+1}{3x-5}\right)^{x-2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^{x-2} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^{\frac{3x-6}{3}} =$
$= \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{3}-\frac{1}{3}} = \lim_{x\to\infty} \left(\left(1+\frac{6}{3x-5}\right)^{\frac{3x-5}{6}}\right)^2 = e^2$

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)+x^2}{3\sin(x)-x} = \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(x)+3x^2+x-x}{3\sin(x)-x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{x(3x+1)}{3\sin(x)-x} \approx$
$\approx \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{x(3x+1)}{3x-x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \lim_{x\to 0} \frac{3x+1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[7]{1+3x}-1}{\sin(4x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[7]{1+3x}-1}{4x}\frac{4x}{\sin(4x)} = \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[7]{1+3x}-1}{x} =$
$= \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt[7]{1+3x}-1)(\sqrt[7]{(1+3x)^6} + \sqrt[7]{(3x+1)^5} + \dots + 1)}{x(\sqrt[7]{(1+3x)^6} + \sqrt[7]{(3x+1)^5} + \dots + 1)} =$
$= \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{3x}{x(\sqrt[7]{(1+3x)^6} + \sqrt[7]{(3x+1)^5} + \dots + 1)} =$
$= \frac{1}{4} \lim_{x\to 0} \frac{3}{(\sqrt[7]{(1+3x)^6} + \sqrt[7]{(3x+1)^5} + \dots + 1)} = \frac{1}{4}\frac{3}{7} = \frac{3}{28}$

(g) $\lim_{x\to 0} \frac{6^x-5^x}{4^x-3^x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\ln(6)} - e^{x\ln(5)}}{e^{x\ln(4)} - e^{x\ln(3)}} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^{x\ln(6)}-1) - (e^{x\ln(5)}-1)}{(e^{x\ln(4)}-1) - (e^{x\ln(3)}-1)} \approx$
$\approx \lim_{x\to 0} \frac{x\ln(6) - x\ln(5)}{x\ln(4) - x\ln(3)} = \frac{\ln\left(\frac{6}{5}\right)}{\ln\left(\frac{4}{3}\right)}$

(h) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x(e^{2x}-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x(e^{2x}-1)}\frac{4x}{4x} = 2 \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{4x^2}\frac{2x}{e^{2x}-1} = 1$

(i) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+5}{4+2x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4+2x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{4+2x^2}\right)^{x^2+2} =$
$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{4+2x^2}\right)^{2x^2+4}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$

2. Ricordiamo che

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ .$$

(a) $\lim_{h\to 0}\frac{6(x+h)^3-2(x+h)-6x^3+2x}{h} =$
$\lim_{h\to 0}\frac{6(x^3+3x^2h+3xh^2+h^3)-2(x+h)-6x^3+2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{18x^2h+18xh^2+6h^3-2h}{h} =$
$= \lim_{h\to 0}(18x^2+18xh+6h^2-2) = 18x^2-2$

(b) $\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}$: notiamo subito che se $x=0$ ci troviamo ad avere $\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h}$, che non esiste. Pertanto la funzione $f(x)=|x|$ non é derivabile in $x=0$. Dividiamo lo studio in due parti:

- Se $x>0$ abbiamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1\ ;$$

- Se $x<0$ abbiamo che

$$\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1\ ;$$

Definendo dunque

$$\text{Sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$

abbiamo che, per $x\neq 0$,

$$\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h} = \text{Sign}(x)$$

(c) $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{\sin(x+h)}-\frac{1}{\sin(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(x+h)}{h\sin(x)\sin(x+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x)-\sin(x)\cos(h)-\sin(h)\cos(x)}{h\sin(x)\sin(x+h)} =$
$= \lim_{h\to 0}\left(\frac{h\sin(x)(1-\cos(h))}{h^2\sin(x)\sin(x+h)} - \frac{\sin(h)\cos(x)}{h\sin(x)\sin(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{h}{2\sin(x+h)} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)\sin(x+h)}\right)$
$= -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$

(d) $\lim_{h\to 0}\frac{e^{-(x+h)^2}-e^{-x^2}}{h} = e^{-x^2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h(2x+h)}-1}{h} = -e^{-x^2}\lim_{h\to 0}\frac{e^{-h(2x+h)}-1}{-(2x+h)h}(2x+h) =$
$= -e^{-x^2}\lim_{h\to 0}(2x+h) = -2xe^{-x^2}$

(e) $\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x+h}}{\sqrt{x+h}-1}-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\sqrt{x+h}(\sqrt{x+h}+1)}{x+h-1}-\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{x-1}}{h}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h+\sqrt{x+h})(x-1)-(x+\sqrt{x})(x+h-1)}{h(x+h-1)(x-1)}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-x+hx-h+x\sqrt{x+h}-\sqrt{x+h}-x^2-hx+x-x\sqrt{x}-h\sqrt{x}+\sqrt{x}}{h(x+h-1)(x-1)}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-h+x\sqrt{x+h}-\sqrt{x+h}-x\sqrt{x}-h\sqrt{x}+\sqrt{x}}{h(x+h-1)(x-1)}=$

$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{\sqrt{x}+1}{(x+h-1)(x-1)}+\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h(x+h-1)}\right)=-\frac{\sqrt{x}+1}{(x-1)^2}+\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h-1)(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$

$=-\frac{\sqrt{x}+1}{(x-1)^2}+\frac{1}{2\sqrt{x}(x-1)}=\frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)+x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}=\frac{-x-2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}=$

$=-\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}=-\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$

(f) $\lim_{h\to 0}\frac{\ln(4(x+h)^2-2(x+h))-\ln(4x^2-2x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(\frac{4(x+h)^2-2(x+h))}{4x^2-2x}\right)=$

$=\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(\frac{4(x+h)^2-2(x+h))}{4x^2-2x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=\ln\left(\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h(8x+4h-2)}{4x^2-2x}\right)^{\frac{1}{h}}\right)=_{(\mathbf{h}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}})}$

$=\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{(8x+\frac{4}{t}-2)}{t(4x^2-2x)}\right)^{t}\right)=\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{(8x-2)}{t(4x^2-2x)}\right)^{t}\right)=$

$=\ln\left(\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{(8x-2)}{t(4x^2-2x)}\right)^{\frac{(4x^2-2x)t}{8x-2}}\right)^{\frac{8x-2}{4x^2-2x}}\right)=\ln\left(e^{\frac{8x-2}{4x^2-2x}}\right)=$

$=\frac{8x-2}{4x^2-2x}=\frac{4x-1}{2x^2-x}$

3. Calcoliamo le derivate generiche delle funzioni date e poi vediamo quanto valgono nel punto indicato:

   (a) $D(4x^2-400)=8x$, dunque in $x_0=3$ abbiamo che il valore della derivata é 24.
   (b) $D(\sin(2x))=2\cos(2x)$, dunque in $x_0=-\frac{\pi}{4}$ abbiamo che il valore della derivata é 0.
   (c) $D(e^{x^2-x})=(2x-1)e^{x^2-x}$, dunque in $x_0=2$ abbiamo che il valore della derivata é $3e^2$.
   (d) $D(\sqrt[7]{x^2})=\frac{2}{7\sqrt[7]{x^5}}$, dunque in $x_0=1$ abbiamo che il valore della derivata é $\frac{2}{7}$.
   (e) $D(\ln(x^2+2))=\frac{2x}{x^2+2}$, dunque in $x_0=0$ abbiamo che il valore della derivata é 0.
   (f) $D(2^x)=2^x\ln(2)$, dunque in $x_0=-1$ abbiamo che il valore della derivata é $\frac{\ln(2)}{2}$.

4. Abbiamo che

$$D[f^{-1}(y)]=\frac{1}{f'(x)}$$

   pertanto:

   (a) $y=\arcsin(x)\Longrightarrow x=\sin(y)$. Ora : $D(\sin(y))=\cos(y)$. Applicando la regola sopra citata abbiamo che

$$D(\arcsin(x))=\frac{1}{\cos(\arcsin(x))}.$$

Essendo $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Longrightarrow \cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ e dunque

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Dunque

$$D(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b) $y = \arccos(x) \Longrightarrow x = \cos(y)$. Ora : $D(\cos(y)) = -\sin(y)$.
Applicando la regola sopra citata abbiamo che

$$D(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sin(\arccos(x))}.$$

Essendo $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Longrightarrow \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$ e dunque

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Dunque

$$D(\arccos(x)) = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(c) $y = \arctan(x) \Longrightarrow x = \tan(y)$. Ora : $D(\tan(y)) = 1 + \tan^2(y)$. Applicando la regola sopra citata abbiamo che

$$D(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

5. Ricordiamo che

- $D[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $D\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

e passiamo alla risoluzione dell'esercizio:

(a) $D[x^3 \sin(x)] = 3x^2 \sin(x) + x^3 \cos(x)$, avendo posto $f(x) = x^3$ e $g(x) = \sin(x)$ nella regola di derivazione del prodotto.

(b) $D\left[\frac{x-2}{\ln(x)(e^x + x^2)}\right]$: sia $f(x) = x - 2$ e $g(x) = \ln(x)(e^x + x^2)$. Notiamo che $g(x)$ é una funzione che é a sua volta prodotto di 2 funzioni $g_1(x) = \ln(x)$ e $g_2(x) = e^x + x^2$, indi

$$g'(x) = \frac{e^x + x^2}{x} + \ln(x)(e^x + 2x)$$

e dunque

$$D\left[\frac{x-2}{\ln(x)(e^x + x^2)}\right] = \frac{\ln(x)(e^x + x^2) - (x-2)\left(\frac{e^x + x^2}{x} + \ln(x)(e^x + 2x)\right)}{\ln^2(x)(e^x + x^2)^2}.$$

(c) $D[xe^x + x^3 \ln(x)] = D[xe^x] + D[x^3 \ln(x)] = e^x + xe^x + 3x^2 \ln(x) + x^2$, avendo svolto le due derivate separatamente con $f_1(x) = x$,
$g_1(x) = e^x$, $f_2(x) = x^3$, $g_2(x) = \ln(x)$.

(d) $D\left[\frac{x\cos(x)\ln(x)}{x^2+4\sin(x)}\right]$: qui dobbiamo effettuare la derivazione del rapporto con $f(x) = x\cos(x)\ln(x)$ e $g(x) = x^2+4\sin(x)$. Notiamo, tuttavia, che $f(x)$ é il prodotto di 3 funzioni, quindi vediamo chi é $f'(x)$ nel dettaglio: poniamo $\tilde{f}(x) = x\ln(x)$ e $\tilde{g}(x) = \cos(x)$ e poniamo, successivamente, $\tilde{f}_1(x) = x$ e $\tilde{f}_2(x) = \ln(x)$. Cosí facendo abbiamo che

$$f'(x) = \tilde{f}'(x)\tilde{g}(x) + \tilde{f}(x)\tilde{g}'(x) = (\tilde{f}_1'(x)\tilde{f}_2(x) + \tilde{f}_1(x)\tilde{f}_2'(x))\tilde{g}(x) + \tilde{f}(x)\tilde{g}'(x) =$$
$$= (\ln(x)+1)\cos(x) - x\ln(x)\sin(x).$$

Detto questo, abbiamo che

$$D\left[\frac{x\cos(x)\ln(x)}{x^2+4\sin(x)}\right] = \frac{[(\ln(x)+1)\cos(x) - x\ln(x)\sin(x)](x^2+4\sin(x)) - f(x)(2x+4\cos(x))}{(x^2+4\sin(x))^2}$$

(e) $D\left[\sqrt[3]{x}\frac{\arcsin(x)}{x^2+2}\right]$: poniamo $f(x) = \sqrt[3]{x}$ e $g(x) = \frac{\arcsin(x)}{x^2+2}$ e applichiamo la regola di derivazione del prodotto. Prima di fare questo dobbiamo applicare la regola di derivazione del rapporto per trovare $g'(x)$: chiamiamo $f_1(x) = \arcsin(x)$ e $g_1(x) = x^2+2$ ottenendo che

$$g'(x) = \frac{\frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\arcsin(x)}{(x^2+2)^2}.$$

Dunque

$$D\left[\sqrt[3]{x}\frac{\arcsin(x)}{x^2+2}\right] = \frac{\arcsin(x)}{3\sqrt[3]{x^2}(x^2+2)} + \sqrt[3]{x}\left(\frac{\frac{x^2+2}{\sqrt{1-x^2}} - 2x\arcsin(x)}{(x^2+2)^2}\right).$$

(f) $D\left[\frac{a^x-2}{b\ln(x)}\right] = \frac{xa^x\ln(a)\ln(x)-(a^x-2)}{bx\ln^2(x)}$, avendo posto $f(x) = a^x-2$ e $g(x) = b\ln(x)$ nella regola di derivazione del rapporto.

(g) $D[x^{-\frac{6}{7}}\arcsin(x)] = -\frac{6}{7}x^{-\frac{13}{7}}\arcsin(x) + \frac{x^{-\frac{6}{7}}}{\sqrt{1-x^2}}$, avendo posto $f(x) = x^{-\frac{6}{7}}$ e $g(x) = \arcsin(x)$ nella regola di derivazione del prodotto.

(h) $D[2xe^x\cos(x)]$: qui dobbiamo applicare la regola di derivazione del prodotto tra $f(x) = 2xe^x$ e $g(x) = \cos(x)$. Per calcolare $f'(x)$ dobbiamo ulteriormente applicare tale regola a $f_1(x) = 2x$ e $g_1(x) = e^x$ ottenendo

$$f'(x) = 2e^x + 2xe^x = 2(x+1)e^x.$$

Dunque

$$D[2xe^x\cos(x)] = 2(x+1)e^x\cos(x) - 2xe^x\sin(x).$$

(i) $D[(6x^7-2x^5)\arccos(x)] = (42x^6-10x^4)\arccos(x) - \frac{(6x^7-2x^5)}{\sqrt{1-x^2}}$, avendo posto $f(x) = 6x^7-2x^5$ e $g(x) = \arccos(x)$ nella regola di derivazione del prodotto.

(j) $D[(\sqrt[5]{x^3}\ln(x)-1)\sin(x)]$: qui vogliamo ancora una volta applicare la regola di derivazione del prodotto a $f(x) = \sqrt[5]{x^3}\ln(x)-1$ e $g(x) = \sin(x)$; per calcolare $f'(x)$ dobbiamo applicare la regola di derivazione del prodotto a $f_1(x) = \sqrt[5]{x^3}$ e $g_1(x) = \ln(x)$ ottenendo che

$$f'(x) = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\ln(x) + \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = \frac{3\ln(x)+5}{5\sqrt[5]{x^2}}.$$

Quindi

$$D[(\sqrt[5]{x^3}\ln(x)-1)\sin(x)] = \frac{(3\ln(x)+5)\sin(x)}{5\sqrt[5]{x^2}} + (\sqrt[5]{x^3}\ln(x)-1)\cos(x).$$

(k) $D\left[\frac{e^x+\sin(x)\cos(x)}{e^x\cos(x)\ln(x)}\right]$: andiamo ad applicare la regola di derivazione del rapporto a $f(x) = e^x + \sin(x)\cos(x) = e^x + \frac{\sin(2x)}{2}$ e
$g(x) = e^x\cos(x)\ln(x)$. Per variare un po andiamo (ora che abbiamo imparato a fare derivate di tripli prodotti) a cercare una formula che ci dia modo di sbrigarcela nel minor tempo possibile: per quanto visto sino ad ora, difatti, abbiamo che

$$D[f(x)g(x)h(x)] = (f'(x)g(x)+f(x)g'(x))h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

cioé

$$D[f(x)g(x)h(x)] = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x).$$

Dunque, chiamando $f_1(x) = e^x$, $g_1(x) = \cos(x)$ e $h_1(x) = \ln(x)$, abbiamo che

$$g'(x) = e^x\cos(x)\ln(x) - e^x\sin(x)\ln(x) + \frac{e^x\cos(x)}{x}.$$

Perció $\left(\text{posta } \frac{e^x+\sin(x)\cos(x)}{e^x\cos(x)\ln(x)} := A(x)\right)$ abbiamo che

$$D[A(x)] = \frac{(e^x+\cos(2x))g(x) - f(x)\left(e^x\cos(x)\ln(x) - e^x\sin(x)\ln(x) + \frac{e^x\cos(x)}{x}\right)}{e^{2x}\cos^2(x)\ln^2(x)}.$$

(l) $D\left[\frac{(|x|-2x^2)\ln(x)}{\tan(x)}\right]$: andiamo ad applicare la regola di derivazione del rapporto a $f(x) = (|x|-2x^2)\ln(x)$ e $g(x) = \tan(x)$. Ancora una volta, per calcolare $f'(x)$ ci serve applicare la regola di derivazione del prodotto a $f_1(x) = |x| - 2x^2$ e $g_1(x) = \ln(x)$, ottenendo che

$$f'(x) = (\mathrm{Sign}(x) - 4x)\ln(x) + \frac{|x|-2x^2}{x}.$$

Dunque

$$D\left[\frac{(|x|-2x^2)\ln(x)}{\tan(x)}\right] = \frac{\left((\mathrm{Sign}(x)-4x)\ln(x) + \frac{|x|-2x^2}{x}\right)\tan(x) - \frac{(|x|-2x^2)\ln(x)}{\cos^2(x)}}{\tan^2(x)}.$$

6. La regola della catena ci dice che

$$D[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x).$$

Tale regola vale, ovviamente, anche se abbiamo piú funzioni concatenate l'una dentro all'altra, cioé

$$D[f(f_1(f_2(\cdots(f_n(x)))))] = f'(f_1(f_2(\cdots(f_n(x)))))f_1'(f_2(\cdots(f_n(x))))\cdots f_n'(x).$$

Andiamo ad applicare tale regola per la risoluzione dell'esercizio (in tal caso ci riserviamo di non specificare ogni volta le varie funzioni concatenate):

(a) $D[\ln(\sin(x))] = \frac{1}{\sin(x)}\cos(x) = \mathrm{cotan}(x)$.

(b) $D[e^{\cos(x)-3x^2}] = -e^{\cos(x)-3x^2}(\sin(x)+6x)$.

(c) $D[x^2\tan(\sqrt{x})] = 2x\tan(\sqrt{x}) + x^2(1+\tan^2(\sqrt{x}))\frac{1}{2\sqrt{x}} =$
$= 2x\tan(\sqrt{x}) + \frac{x\sqrt{x}(1+\tan^2(\sqrt{x}))}{2}$.

(d) $D[x^x] = D[e^{x\ln(x)}] = e^{x\ln(x)}(\ln(x)+1) = x^x(\ln(x)+1)$.

(e) $D[e^{\arctan(x^2)}] = e^{\arctan(x^2)}\frac{1}{1+(x^2)^2}2x = \frac{2xe^{\arctan(x^2)}}{1+x^4}$.

(f) $D\left[\left(\frac{\ln(x)}{\cos(x)}\right)^{x^3}\right]$: spendiamo due parole su questa particolare derivata.

$$D[f(x)^{g(x)}] = D[e^{g(x)\ln(f(x))}] = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\ln(f(x)) + \frac{g(x)f'(x)}{f(x)}\right).$$

Dunque, essendo la nostra $f(x) = \frac{\ln(x)}{\cos(x)}$, abbiamo che

$$D\left[\left(\frac{\ln(x)}{\cos(x)}\right)^{x^3}\right] = \left(\frac{\ln(x)}{\cos(x)}\right)^{x^3}\left(3x^2\ln\left(\frac{\ln(x)}{\cos(x)}\right) + \frac{x^3\,\frac{\frac{\cos(x)}{x}+\sin(x)\ln(x)}{\cos^2(x)}}{\frac{\ln(x)}{\cos(x)}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\ln(x)}{\cos(x)}\right)^{x^3}\left(3x^2\ln\left(\frac{\ln(x)}{\cos(x)}\right) + \frac{x^2(\cos(x)+x\sin(x)\ln(x))}{\cos(x)\ln(x)}\right).$$

(g) $D[(\ln(\cos(2x)))^{3^x}] = 3^x(\ln(\cos(2x)))^{3^x}\left(\ln(3)\ln(\ln(\cos(2x))) - \frac{2\tan(2x)}{\ln(\cos(2x))}\right)$.

(h) $D[\sqrt{\ln(\arctan(x^2))}] = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\arctan(x^2))}}\frac{1}{\arctan(x^2)}\frac{2x}{1+x^4} = \frac{x}{\sqrt{\ln(\arctan(x^2))}\arctan(x^2)(1+x^4)}$.

(i) $D\left[e^{\frac{x^3+\sin(x)}{x^4\cos(x)}}\right] = e^{\frac{x^3+\sin(x)}{x^4\cos(x)}}\left(\frac{(3x^2+\cos(x))x^4\cos(x)-(x^3+\sin(x))(4x^3\cos(x)-x^4\sin(x))}{x^8\cos^2(x)}\right)$.

(j) $D\left[\sin\left(\frac{3}{x}\right)\right] = -\frac{3}{x^2}\cos\left(\frac{3}{x}\right)$.

(k) $D\left[\arcsin\left(e^{\frac{1}{2}\ln(1-\cos^2(x))}\right)\right] = D\left[\arcsin\left(\sqrt{1-\cos^2(x)}\right)\right] = D[\arcsin(\sin(x))] =$
$= D[x] = 1$.

(l) $D[(\arctan(\ln(\sin(x))))^3] = 3(\arctan(\ln(\sin(x))))^2\frac{1}{1+(\ln(\sin(x)))^2}\frac{1}{\sin(x)}\cos(x) =$
$= \frac{3(\arctan(\ln(\sin(x))))^2\cot(x)}{1+(\ln(\sin(x)))^2}$.

(m) $D[\sqrt[5]{\cos(e^x)}] = \frac{-e^x\sin(e^x)}{5\sqrt[5]{\cos^4(e^x)}}$.

(n) $D[\sin(\sin(\sin(x+199)))] =$
$= \cos(\sin(\sin(x+199)))\cos(\sin(x+199))\cos(x+199)$.

(o) $D\left[\sin\left(\ln\left(2^x+x^3+\frac{3x^2+1}{\tan(x)}\right)\right)\right] = \cos\left(\ln\left(2^x+x^3+\frac{3x^2+1}{\tan(x)}\right)\right)\frac{A(x)}{2^x+x^3+\frac{3x^2+1}{\tan(x)}}$
con

$$A(x) = 2^x\ln(2) + 3x^2 + \frac{6x\tan(x) - (3x^2+1)(1+\tan^2(x))}{\tan^2(x)}.$$

7. La prima verifica é un conto algebrico, difatti
   - $\cosh^2(x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}+2}{4} = \frac{\cosh(2x)+1}{2}$;
   - $\sinh^2(x) = \frac{e^{2x}+e^{-2x}-2}{4} = \frac{\cosh(2x)-1}{2}$.

   Dunque
   $$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{\cosh(2x)+1}{2} + \frac{-\cosh(2x)+1}{2} = 1.$$
   Procediamo con le derivate:

   - $D[\cosh(x)] = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \sinh(x)$
   - $D[\sinh(x)] = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$

   Per derivare le loro funzioni inverse dobbiamo applicare la stessa formula dell'esercizio 4.:

   $y = \cosh^{-1}(x) \Longrightarrow x = \cosh(y)$. Essendo $D[\cosh(y)] = \sinh(y)$ abbiamo che
   $$D[\cosh^{-1}(x)] = \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}(x))}.$$
   Ma $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Longrightarrow \sinh(x) = \sqrt{\cosh^2(x) - 1}$ e quindi
   $$\sinh(\cosh^{-1}(x)) = \sqrt{x^2-1} \text{ che ci dice che}$$
   $$D[\cosh^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$
   Analogamente

   $y = \sinh^{-1}(x) \Longrightarrow x = \sinh(y)$. Essendo $D[\sinh(y)] = \cosh(y)$ abbiamo che
   $$D[\sinh^{-1}(x)] = \frac{1}{\cosh(\sinh^{-1}(x))}.$$
   Ma $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \Longrightarrow \cosh(x) = \sqrt{\sinh^2(x) + 1}$ e quindi
   $$\cosh(\sinh^{-1}(x)) = \sqrt{x^2+1} \text{ che ci dice che}$$
   $$D[\sinh^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$
   Per concludere dobbiamo verificare che

   - $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$
   - $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$

   Per farlo possiamo procedere in due maniere differenti:

   (a) Facciamo le derivate di $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ e $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$:
   $$D[f(x)] = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = D[\sinh^{-1}(x)];$$
   $$D[g(x)] = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = D[\cosh^{-1}(x)].$$
   Dunque queste due funzioni hanno le stesse derivate delle funzioni inverse di $\sinh(x)$ e $\cosh(x)$. Se questo non ci basta per convincerci che sono proprio queste le funzioni inverse delle funzioni iperboliche, abbiamo anche che

(b)

$$\sinh(\ln(x+\sqrt{x^2+1})) = \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2+1})} - e^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})}}{2} =$$
$$= \frac{x+\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2-1}{2(x+\sqrt{x^2+1})} =$$
$$= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = \frac{2x(x+\sqrt{x^2+1})}{2(x+\sqrt{x^2+1})} = x$$

e

$$\cosh(\ln(x+\sqrt{x^2-1})) = \frac{e^{\ln(x+\sqrt{x^2-1})} + e^{-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}}{2} =$$
$$= \frac{x+\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^2+1}{2(x+\sqrt{x^2-1})} =$$
$$= \frac{2x^2+2x\sqrt{x^2-1}}{2(x+\sqrt{x^2-1})} = \frac{2x(x+\sqrt{x^2-1})}{2(x+\sqrt{x^2-1})} = x$$

Questo sicuramente ci basta per concludere.