Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 11 - 15 Maggio 2014

1. Ricordiamo come applicare la regola di integrazione per sostituzione : ponendo $f(x) = g(t)$ possiamo cosí sostituire all'interno dell'integrale ogni x con la t. Per fare ció dobbiamo, peró, modificare anche il dx in funzione del dt e gli estremi di integrazione : da $f(x) = g(t)$ otteniamo (derivando il termine sulla sinistra in x ed il termine sulla destra in t) $f'(x)dx = g'(t)dt$.
Gli estremi di integrazione variano, invece, nella seguente maniera : se la x varia tra α e β, sostituendo tali valori in $f(x) = g(t)$ otterremo che la t varierá tra $g^{-1}(f(\alpha))$ e $g^{-1}(f(\beta))$. Detto ció possiamo affrontare i seguenti integrali :

   (a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}\ dx$: Effettuiamo il cambio di variabile $x^2 = t$ cosí da ottenere
$$\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{(x^2-3)^3}}\ dx = \frac{1}{2}\int_4^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t-3)^3}} = -\left[\frac{1}{\sqrt{t-3}}\right]_4^{+\infty} = 1.$$

   (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^4+8)^5}} + 2xe^{-x}\ dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^4+8)^5}}\ dx\ + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}\ dx$. I due integrali devono essere svolti con due procedure differenti: nel primo effettuiamo la sostituzione $x^4 + 8 = t$, nel secondo applichiamo la regola di integrazione per parti con $f(x) = x$ e $g(x) = e^{-x}$. Cosí facendo otteniamo
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sqrt[3]{(x^4+8)^5}} + 2xe^{-x}\ dx = \frac{1}{4}\int_8^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t^5}} + 2\left\{\left[-xe^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}\ dx\right\} =$$
$$= -\frac{3}{8}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}\right]_8^{+\infty} - 2\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt[3]{64}} + 2 = \frac{3}{32} + 2 = \frac{67}{32}.$$

   (c) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ dx$: Effettuiamo la sostituzione $\frac{1}{x} = t$ ed otteniamo
$$\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\ \sin\left(\frac{1}{x}\right)\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\ dt = \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

   (d) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x}(2x+1)}$: In questo caso la sostituzione da effettuare é $2x = t^2$; applicandola otteniamo
$$\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2x}(2x+1)} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \left[\arctan(t)\right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

   (e) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ dx$: Dobbiamo applicare il metodo di integrazione delle funzioni razionali. Essendo
$$x^3 + 2x^2 + x + 2 = (x+2)(x^2+1)$$

abbiamo che

$$\frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\iff\frac{x^2(A+B)+x(2B+C)+A+2C}{(x+2)(x^2+1)}\iff$$

$$\iff\begin{cases}A+B=0\\2B+C=9\\A+2C=8\end{cases}\iff\begin{cases}A=-2\\B=2\\C=5\end{cases}$$

Pertanto

$$\int_0^{+\infty}\frac{9x+8}{x^3+2x^2+x+2}\ dx=-2\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x+2}+\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^2+1}\ dx+5\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=\Big[-2\ln(x+2)+\ln(x^2+1)+5\arctan(x)\Big]_0^{+\infty}=\left[\ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+4x+4}\right)+5\arctan(x)\right]_0^{+\infty}=$$

$$=-\ln\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{2}\pi=2\ln(2)+\frac{5}{2}\pi.$$

(f) Poniamo

$$I_n:=\int_0^{+\infty}x^ne^{-x}\ dx.$$

Effettuiamo un'integrazione per parti con $f(x)=x^n$ e $g(x)=e^{-x}$ ottenendo

$$I_n=\left[-x^ne^{-x}\right]_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-x}\ dx=n\ I_{n-1}.$$

Iterando otteniamo dunque che

$$I_n=n\ I_{n-1}=n(n-1)\ I_{n-2}=\cdots\cdots=n!\ I_0.$$

Essendo

$$I_0=\int_0^{+\infty}e^{-x}\ dx=-\left[e^{-x}\right]_0^{+\infty}=1$$

Abbiamo che $I_n=n!$.

2. Per svolgere questa tipologia di esercizio sfrutteremo qualche concetto visto durante il corso :

- $\displaystyle\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}<+\infty\iff\alpha<1$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}<+\infty\iff\alpha>1$

Inoltre

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=L\in\mathbb{R}\setminus\{0\}\implies f(x)\approx g(x)\ \text{ intorno ad }\ x_0.$$

In particolare, per la definizione di limite, abbiamo che

- Se $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0\implies$ esiste $\epsilon>0:\ |f(x)|<\epsilon|g(x)|$ vicino ad x_0.
- Se $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty\implies$ esiste $M>0:\ |f(x)|>M|g(x)|$ vicino ad x_0.

Con tali accortezze possiamo addentrarci nella risoluzione degli esercizi dati :

(a) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \int_0^1 e^{-x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = I_1 + I_2.$
L'integranda é limitata in $[0,1]$, indi sicuramente I_1 converge.
Vediamo se si puó dir lo stesso di I_2:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = 0$$

quindi $e^{-x^2} < \frac{1}{x^2}$ definitivamente. Pertanto

$$\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\, dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty\ .$$

Dunque $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$ converge.

(b) $\int_0^{+\infty} \log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = \int_0^1 \log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx + \int_1^{+\infty} \log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx.$
Abbiamo che

$$\lim_{x\to0} \frac{\log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0} \sqrt{x}\log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

dunque $\int_0^1 \log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty\ .$
D'altra parte

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty$$

pertanto $\int_1^{+\infty} \log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx > \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$, quindi

$$\int_0^{+\infty} \log(x)\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = +\infty\ .$$

(c) $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx + \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx.$
Essendo

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to0} \sqrt{x}e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \int_0^1 e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx < +\infty\ .$$

Poiché, invece,

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1 \Longrightarrow \int_1^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = +\infty$$

abbiamo che $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}}\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\, dx = +\infty\ .$

(d) $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right)\, dx$: Per quanto visto nell'esercizio precedente abbiamo che questo integrale converge. Difatti vicino a 0 il comportamento é lo stesso, mentre per $x \to +\infty$

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) \approx \frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty \ .$$

(e) $\int_{-1}^{1} \tan(x)\log(x^2)\, dx$: Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)\log(x^2)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\tan(x)\log(x^2) = 0$$

abbiamo che l'integrale converge. Inoltre, essendo l'integranda dispari, possiamo concludere che $\int_{-1}^{1} \tan(x)\log(x^2)\, dx = 0.$

(f) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}\, dx = \int_0^{1} \frac{\sin(x)}{x^2+1}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}\, dx = I_1 + I_2.$
Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2+1}} = \lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$$

abbiamo che $I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} < +\infty$.
Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\sin(x)}{x^2+1}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{\sin(x)}{x^2+1} = 0$$

dunque $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < +\infty \Longrightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+1}\, dx < +\infty$.

(g) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}\, dx$: Limitiamoci a studiare $\int_0^{\infty} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}\, dx$ per cominciare, dividendo esso in I_1 ed I_2 come al solito.
Essendo $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{2xe^x} = 1$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}e^x}{(x^4+1)} = 0 \Longrightarrow I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty \ .$$

Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3e^x}{(x^4+1)\sinh(x)} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^4+1} \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} = 0$$

quindi $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} < +\infty$.
Passiamo ora a studiare

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}\, dx + \int_{-1}^{0} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}\, dx = I_3 + I_4.$$

I_3 converge per la stessa stima di I_2.
Vediamo quindi di studiare I_4 per concludere. Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-x}e^x}{x^4+1} = 1$$

abbiamo che $I_4 \approx \int_{-1}^{0} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \left[-2\sqrt{1-x}\right]_{-1}^{0} = 2(\sqrt{2}-1) < +\infty$.
Mettendo tutto assieme otteniamo $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^x}{(x^4+1)\sinh(x)}\, dx < +\infty$.

(h) $\int_0^1 \frac{(x^x-1)\cos(x)}{\sin(x)}\, dx$: Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x^x-1)\cot(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}(x^x-1)\cot(x) = \lim_{x\to 0} x^{\frac{3}{2}}\ln(x)\cot(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\ln(x)\cos(x) = 0$$

(abbiamo utilizzato il fatto che $(x^x-1) = (e^{x\ln(x)}-1) \approx x\ln(x)$ essendo $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ ed il fatto che $\sin(x) \approx x$ essendo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$) abbiamo che

$$\int_0^1 \frac{(x^x-1)\cos(x)}{\sin(x)}\, dx < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty .$$

(i) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-4)}$: Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{|x|}(x-4)}}{\frac{1}{\sqrt{|x|}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{4}$$

abbiamo che $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}(x-4)} \approx \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$.

(j) $\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin(x)}\, dx$: essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1$$

abbiamo che $\frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin(x)} \approx \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, dunque

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\sqrt{x})}{\sin(x)}\, dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty .$$

(k) $\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\, dx$: Effettuiamo la sostituzione $x = t^2$ ottenendo

$$\int_4^5 \frac{1-3x}{\sqrt{x}-2}\, dx = -2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{3t^3-t}{t-2}\, dt = -2\int_2^{\sqrt{5}} 3t^2+6t+11+\frac{22}{t-2}\, dt.$$

Perché l'integrale converga dobbiamo vedere se converge $\displaystyle\int_2^{\sqrt{5}} \frac{dt}{t-2}$.
Se chiamiamo $t-2=y$ otteniamo $\displaystyle\int_0^{\sqrt{5}-2} \frac{dy}{y} = +\infty$.

(l) $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx$: Effettuiamo la sostituzione $x-1=t$ ottenendo che

$$\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(t+1)}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt.$$

Essendo

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{\cos(t+1)}{t^{\frac{2}{3}}}}{\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{t\to 0} \cos(t+1) = \cos(1)$$

abbiamo che $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(t+1)}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt \approx \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}}\, dt < +\infty.$
Pertanto (ovviamente su $(-1,0)$ vale la stessa stima) abbiamo che $\displaystyle\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx < +\infty$.

(m) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x\sin(x)}$: Ovviamente vicino a 0 sappiamo che $\sin(x) \approx x$, dunque

$$\int_0^1 \frac{dx}{x\sin(x)} \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^2} = +\infty\ .$$

(n) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x^2+1)(x+1)(x-1)}}$: Effettuiamo la sostituzione $x-1=t$ ed abbiamo che

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^4-1}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t+2)(t^2+2t+2)}}.$$

Essendo

$$\lim_{t\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{t(t+2)(t^2+2t+2)}}}{\frac{1}{\sqrt{t}}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{(t+2)(t^2+2t+2)}} = \frac{1}{2}$$

abbiamo che $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(t+2)(t^2+2t+2)}} \approx \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} < +\infty$.

3. (a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}}\, dx = I_1 + I_2.$
Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{-\frac{\alpha^2}{4x}} = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha \neq 0 \end{cases}$$

abbiamo che $I_1 < +\infty\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ (essendo $I_1 < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ per $\alpha \neq 0$ e $I_1 \approx \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ per $\alpha = 0$). Inoltre

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} x^{\frac{3}{2}} e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}} = 0\ \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$$

e quindi $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dunque $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x-\frac{\alpha^2}{4x}}}{\sqrt{x}}\, dx < +\infty \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx \;+ \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx.$
Essendo $1 - e^{-x} \approx x$ per x vicino a 0, abbiamo che

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx \approx \int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}} < +\infty \iff \alpha - 1 < 1 \iff \alpha < 2.$$

Consideriamo $\beta > 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\beta}} = \lim_{x\to+\infty} x^{\beta-\alpha} = \begin{cases} +\infty & \beta > \alpha \\ 1 & \beta = \alpha \\ 0 & \beta < \alpha \end{cases}.$$

Dunque $\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx < +\infty$ se e solo se $\alpha \geq \beta > 1$.

Pertanto $\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^\alpha}\, dx < +\infty \iff \alpha \in (1,2)$.

(c) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-\alpha x}}{1+x}\, dx \;+ \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x}\, dx = I_1 + I_2.$

Notiamo subito che se $\alpha = 0$ l'integrale diventa $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = +\infty$.

Escludiamo dunque il caso $\alpha = 0$. Vediamo cosa succede a seconda che α sia positivo o negativo:

- Sia $\alpha > 0$: abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{e^{-\alpha x}}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}e^{-\alpha x}}{x+1} = 0 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{-\alpha x}}{x+1}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-\alpha x}}{x+1} = 0\ .$$

  Dunque $I_1 < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$ e $I_2 < \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} < +\infty$ per $\alpha > 0$;

- Sia $\alpha < 0$: Poniamo $\beta = -\alpha > 0$ e notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{e^{\beta x}}{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}e^{\beta x}}{x+1} = +\infty$$

  e quindi $I_2 > \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = +\infty$ per $\alpha < 0$.

Perció $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x}}{1+x}\, dx < +\infty \iff \alpha > 0$.

(d) $\int_0^{\pi} \log(1 + \alpha\cos(x))\, dx$: inanzitutto vogliamo che la funzione sia definita in $\mathbb{R}$, dunque dovrá essere $1 + \alpha\cos(x) > 0$. Essendo $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ abbiamo che $1 - \alpha \leq 1 + \alpha\cos(x) \leq 1 + \alpha$ e quindi, perché sia positivo, avremo che

$-1 < \alpha < 1$. Per $\alpha \in (-1,1)$ non abbiamo, ovviamente, problemi. Vediamo che succede per $\alpha = \pm 1$.
Consideriamo

$$\int_0^{\pi} \log(1+\alpha\cos(x))\ dx = \int_0^{1} \log(1+\alpha\cos(x))\ dx + \int_1^{\pi} \log(1+\alpha\cos(x))\ dx = I_1 + I_2\ .$$

- Sia $\alpha = -1$: Essendo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1-\cos(x))}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \sqrt{x}\log(1-\cos(x)) = 0 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to \pi} \frac{\log(1-\cos(x))}{\frac{1}{\sqrt{\pi-x}}} = \lim_{x\to \pi} \sqrt{\pi-x}\log(1-\cos(x)) = 0$$

  abbiamo che $I_1 < \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} < +\infty$ e $I_2 < \displaystyle\int_1^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\pi-x}} < +\infty$;
- Sia $\alpha = 1$: Valgono esattamente gli stessi limiti e dunque le stesse stime del caso $\alpha = -1$.

Dunque $\displaystyle\int_0^{\pi} \log(1+\alpha\cos(x))\ dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha \in [-1,1]$.

(e) $\displaystyle\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^{\alpha}}{\sqrt{x^2-4}}\ dx$: Il problema é, evidentemente, in $x = 2$ (in quanto si annulla il denominatore).
Essendo $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$ abbiamo che

$$\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^{\alpha}}{\sqrt{x^2-4}}\ dx \approx \int_2^3 \frac{x(x-2)^{\alpha}}{\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}}\ dx = \int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x+2}} \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \approx$$

$$\approx \int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}} \quad \text{essendo} \quad \lim_{x\to 2} \frac{\frac{x}{\sqrt{x+2}(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}}{\frac{1}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}}} = \lim_{x\to 2} \frac{x}{\sqrt{x+2}} = 1.$$

Effettuando la sostituzione $x - 2 = t$ otteniamo che

$$\int_2^3 \frac{dx}{(x-2)^{\frac{1}{2}-\alpha}} = \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}-\alpha}} < +\infty \Longleftrightarrow \frac{1}{2} - \alpha < 1 \Longleftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}.$$

Dunque $\displaystyle\int_2^3 \frac{x(\sin(x-2))^{\alpha}}{\sqrt{x^2-4}}\ dx < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$.

(f) $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}}$: I problemi vi sono per $\alpha = 2$ ed $\alpha = 3$.
Essendo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{(x-2)\sqrt{x-3}} = 1$$

si ha che $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \approx \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\frac{3}{2}}} < +\infty \ \ \forall\ \alpha > 3$.
Sia $\alpha = 3$: Essendo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{(x-2)\sqrt{x-3}}}{\frac{1}{\sqrt{x-3}}} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x-2} = 1$$

si ha che (per $M >> 3$, $M < +\infty$)

$$\int_3^M \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \approx \int_3^M \frac{dx}{\sqrt{x-3}} = \left[2\sqrt{x-3}\right]_3^M = 2\sqrt{M-3} < +\infty\ .$$

Dunque $\alpha = 3$ va bene.
Consideriamo ora $\alpha = 2$: Essendo

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{(x-2)\sqrt{3-x}}}{\frac{1}{x-2}} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{3-x}} = 1$$

abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} \approx \gamma + \int_2^3 \frac{dx}{x-2}, \quad \text{con} \quad \gamma = \int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{3-x}} < +\infty\ .$$

Ma $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x-2} = [\log(x-2)]_2^3 = +\infty$, indi $\alpha = 2$ non va bene.
Non essendoci discontinuitá dell'integranda per $2 < \alpha < 3$, abbiamo che

$$\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{(x-2)\sqrt{|x-3|}} < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > 2\ .$$

4. (a) Come possiamo vedere nella Figura 1, per $x \in [0,1]$ il grafico di $g(x)$ é sopra a quello di $f(x)$, mentre successivamente (quindi per $x \in [1, \frac{7}{4}]$) il grafico di $f(x)$ é sopra a quello di $g(x)$. Dunque l'area compresa tra le due funzioni e la retta $x = \frac{7}{4}$ é data da

$$\int_1^{\frac{7}{4}} (f(x) - g(x))\ dx = \int_1^{\frac{7}{4}} x^2 - \sqrt{x}\ dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{7}{4}} = \frac{407 - 112\sqrt{7}}{192}.$$

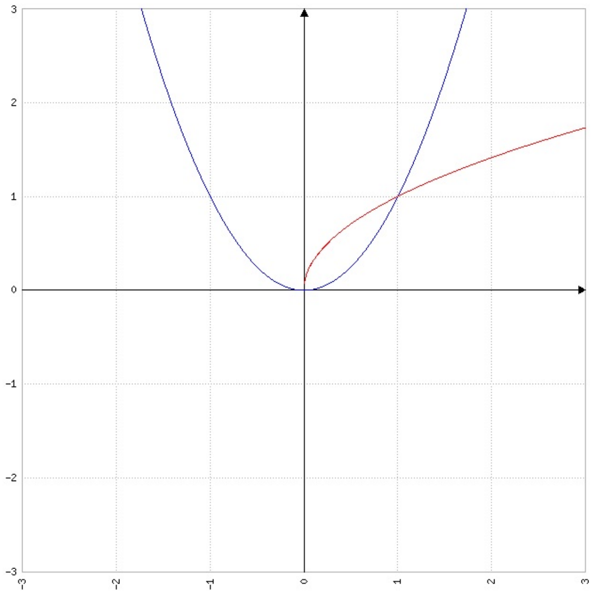

Figura 1: Grafico delle funzioni x^2 (Blu) e $\sqrt{x}$ (Rosso)

(b) Notiamo inanzitutto che $x^2+4x+4=(x+2)^2$ e $x^2-4x+4=(x-2)^2$. Come possiamo vedere in Figura 2, le due parabole si incontrano nel punto $(0,4)$. Inoltre esse incontrano l'asse x rispettivamente nei punti $(-2,0)$ e $(2,0)$. Dunque, l'area compresa tra esse e l'asse x é data da

$$\int_{-2}^{0}(x+2)^2\,dx+\int_{0}^{2}(x-2)^2\,dx=\left[\frac{(x+2)^3}{3}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{(x-2)^3}{3}\right]_{0}^{2}=\frac{8}{3}+\frac{8}{3}=\frac{16}{3}.$$

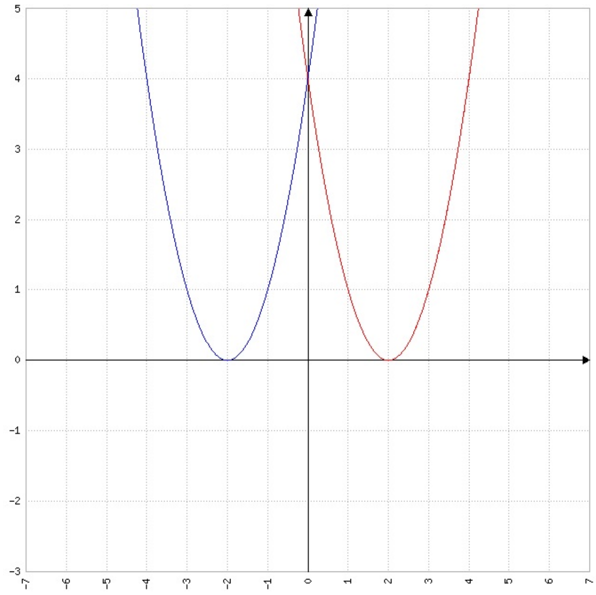

Figura 2: Grafico delle parabole $(x+2)^2$ (Blu) e $(x-2)^2$ (Rosso)

(c) Come é evidente dalla Figura 3, l'area che ci interessa é la fetta di semicirconferenza compresa tra le due rette $y=3x$ ed $y=-3x$. Per capire gli estremi di integrazione dobbiamo vedere quali sono i punti di intersezione tra la semicirconferenza e le due rette. Per fare questo basta trovare la soluzione dei sistemi tra tali funzioni :

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=3x \end{cases} \iff 3x=\sqrt{1-x^2} \iff x=\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$\begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ y=-3x \end{cases} \iff -3x=\sqrt{1-x^2} \iff x=-\frac{1}{\sqrt{10}}$$

Dunque l'area che ci interessa é data da

$$A:=\int_{-\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0}\sqrt{1-x^2}+3x\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{10}}}\sqrt{1-x^2}-3x\,dx=$$

$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{10}}}^{\frac{1}{\sqrt{10}}}\sqrt{1-x^2}\,dx+\frac{3}{2}\left[x^2\right]_{-\frac{1}{\sqrt{10}}}^{0}-\frac{3}{2}\left[x^2\right]_{0}^{\frac{1}{\sqrt{10}}}=-\frac{3}{10}+2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{10}}}\sqrt{1-x^2}\,dx\,.$$

Effettuando la sostituzione $x=\sin(y)$ otteniamo che

$$A=-\frac{3}{10}+2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{10}}}\sqrt{1-x^2}\,dx=-\frac{3}{10}+2\int_{0}^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)}\cos^2(y)\,dy=$$

$$= -\frac{3}{10} + [x + \sin(x)\cos(x)]_0^{\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)} = -\frac{3}{10} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \gamma.$$

Giacché

$$\gamma = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{10}}\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)$$

ed essendo

$$\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{1}{10}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\text{abbiamo che} \quad \gamma = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right)\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right) = \frac{3}{10}.$$

Dunque

$$A = -\frac{3}{10} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + \frac{3}{10} = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

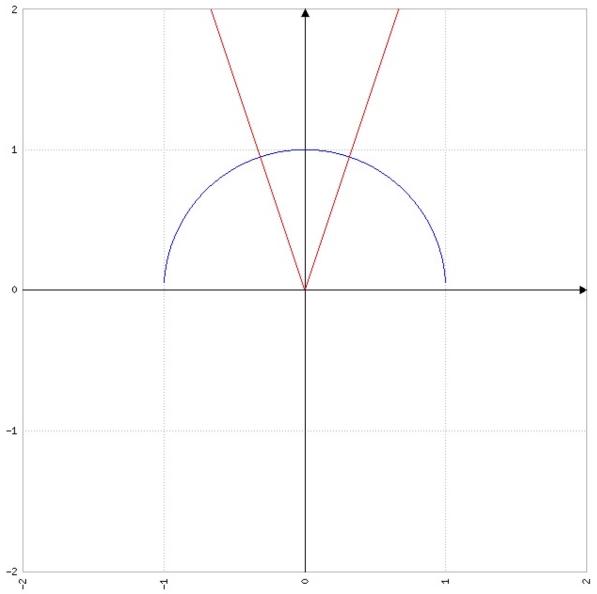

Figura 3: Grafico della funzione $y = 3|x|$ e della semicirconferenza unitaria ($y = \sqrt{1 - x^2}$)