Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 12 - 20 Maggio 2014

1. Per scambiare limite ed integrale ci serve che la funzione $f_n(x)$ sia equidominata da una certa funzione $g(x)$ (non dipendente da n) su (a,b), cioé vogliamo che esista $g(x)$: $|f_n(x)| \leq |g(x)|\ \forall\ x \in (a,b)$ e tale che $\int_a^b g(x)\ dx < \infty$. Inoltre chiediamo anche la convergenza uniforme delle $f_n(x)$ sull'intervallo considerato.

   (a) Abbiamo che
$$\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx} \longrightarrow_{n\to\infty} 0 \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$
   La successione é equidominata su tutto $(0,+\infty)$ perché
$$\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx} \leq xe^{-nx^2} \leq xe^{-x^2}$$
   e
$$\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\ dx = \left[-\frac{e^{-x^2}}{2}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$
   Inoltre la convergenza é uniforme su tutti i compatti contenuti in $(0,+\infty)$ poiché
$$\sup_{x\in[\delta,M]}\left|\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}\right| \leq \sup_{x\in[\delta,M]}|xe^{-nx^2}| \leq Me^{-n\delta^2} \longrightarrow_{n\to+\infty} \quad 0.$$
   Quindi si puó applicare il passaggio al limite sotto segno di integrale improprio:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}\ dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{nx^2e^{-nx^2}}{1+nx}\right)\ dx = \int_0^{+\infty} 0\ dx = 0.$$

   (b) Abbiamo che
$$\frac{\sin(nx)}{n+x} \longrightarrow_{n\to\infty} \quad 0 \ \ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$
   La convergenza é uniforme in tutto l'intervallo $[0,+\infty)$ perché
$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{\sin(nx)}{n+x}\right| \leq \sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{n+x}\right| \leq \frac{1}{n} \longrightarrow_{n\to\infty} \quad 0.$$
   La successione non é, peró, equidominata, quindi non é consentito scambiare i segni di limite ed integrale. Tuttavia, integrando per parti con $f'(x) = \sin(nx)$ e $g(x) = \frac{1}{n+x}$, si trova che
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n+x}\ dx = \lim_{n\to\infty}\left(\left[-\frac{\cos(nx)}{n(n+x)}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2}\ dx\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} - \int_0^{+\infty}\frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2}\ dx\right) = \lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{-\cos(nx)}{n(n+x)^2}\ dx.$$

La funzione $-\frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2}$ tende uniformemente a $0 \ \ \forall\, x \in [0,+\infty)$, perché

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2}\right| \leq \sup_{x\in[0,+\infty)}\left|\frac{1}{n(n+x)^2}\right| \leq \frac{1}{n^3} \longrightarrow_{n\to\infty} \quad 0.$$

Inoltre é equidominata in quanto

$$\left|\frac{\cos(nx)}{n(n+x)^2}\right| \leq \left|\frac{1}{n(n+x)^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

e

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Si puó dunque passare al limite sotto segno di integrale e si trova che

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}\frac{-\cos(nx)}{n(n+x)^2}\ dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-\cos(nx)}{n(n+x)^2}\right)\ dx = \int_0^{+\infty} 0\ dx = 0.$$

2. (a) $f_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \quad x \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Tuttavia non vi é convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$, difatti

$$\lim_{x\to-\infty}(f_n(x) - f(x)) = +\infty$$
$$\lim_{x\to\infty}(f_n(x) - f(x)) = -\infty$$

mentre $D[f_n(x) - f(x)] = \cos\left(\frac{x}{n}\right) - 1 > 0$ mai! Quindi $f_n(x) - f(x)$ é decrescente e

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = +\infty.$$

Tuttavia vi é convergenza su ogni intervallo compatto, difatti,
$\forall\, M > 0$,

$$\sup_{x\in[-M,M]}\left|n\sin\left(\frac{x}{n}\right) - x\right| = -n\sin\left(\frac{M}{n}\right) + M \longrightarrow_{n\to\infty} \quad 0.$$

Dunque é possibile scambiare limite ed integrale in $[0,13]$.

(b) $g_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \quad 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Vogliamo calcolare $\sup_{x\in[0,\infty)}|g_n(x)|$.
Notiamo che $g_n(x) > 0$ se $x \neq 0$. Inoltre $g_n(0) = 0$ e
$\lim_{x\to+\infty} g_n(x) = 0 \Longrightarrow g_n(x)$ ha un massimo in $[0,+\infty)$. Calcoliamolo con la derivata di $g_n(x)$:

$$g_n'(x) = \frac{n(n^2 - x^2)}{(n^2+x^2)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow n^2 - x^2 \geq 0 \Longleftrightarrow -n \leq x \leq n.$$

Dunque il massimo di $g_n(x)$ é in $x = n$. Perció

$$\sup_{x\in[0,+\infty)}|g_n(x)| = |g_n(n)| = \frac{1}{2} \nrightarrow_{n\to\infty} \quad 0.$$

Non vi é, dunque, convergenza uniforme su $[0,+\infty)$ e non é possibile scambiare limite ed integrale.

(c) $h_n(x) \longrightarrow_{n\to\infty} \quad 0 \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Abbiamo che

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{e^{-nx}}{n^2+x^2}\right| \le \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{1}{n^2+x^2}\right| \le \frac{1}{n^2} \longrightarrow_{n\to\infty} \ 0.$$

Dunque la convergenza é uniforme su $[0,1]$ ed é possibile scambiare limite ed integrale.

3. Effettuiamo il cambio di variabile $nx = y$ per togliere la dipendenza da n dagli estremi di integrazione:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{ne^x \arctan(nx)}{n^2x^2+1}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{\frac{y}{n}} \arctan(y)}{y^2+1}\, dy.$$

Ora: l'intervallo di convergenza é limitato e l'integranda converge uniformemente a $\frac{\arctan(y)}{y^2+1}$. Difatti

$$\sup_{y\in[0,1]} \left|\frac{e^{\frac{y}{n}}\arctan(y)}{y^2+1} - \frac{\arctan(y)}{y^2+1}\right| = \sup_{y\in[0,1]} \frac{|e^{\frac{y}{n}}-1|\arctan(y)}{y^2+1} \le \frac{\pi}{4} \sup_{y\in[0,1]} |e^{\frac{y}{n}}-1| \longrightarrow_{n\to\infty} \ 0.$$

Dunque possiamo scambiare limite ed integrale:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{\frac{y}{n}}\arctan(y)}{y^2+1}\, dy = \int_0^1 \lim_{n\to\infty}\left(\frac{e^{\frac{y}{n}}\arctan(y)}{y^2+1}\right) dy = \int_0^1 \frac{\arctan(y)}{y^2+1}\, dy =$$

$$= \left[\frac{\arctan^2(y)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}.$$

4. (a) $I := \displaystyle\int_1^2 \frac{(1-\sqrt{1+x+x^2})^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\, dx$: Notiamo inanzitutto che

$$x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1\right] = \frac{3}{4}\left[\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1\right].$$

Dunque

$$\int_1^2 \frac{\left(1-\sqrt{1+x+x^2}\right)^2}{x^2\sqrt{1+x+x^2}}\, dx = \int_1^2 \frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)^2}{x^2\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}\, dx.$$

Effettuiamo, ora, la sostituzione $\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = \sinh(t)$, ottenendo:

$$\int_1^2 \frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}\right)^2}{x^2\ \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}}\, dx = \int_\alpha^\beta \frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh(t)\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}\sinh(t)-1}{2}\right)^2}\, dt$$

con

$$\begin{cases} \alpha = \operatorname{settsinh}(\sqrt{3}) = \ln(\sqrt{3}+2) \\ \beta = \operatorname{settsinh}\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right) = \ln\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right) \end{cases}.$$

Ora:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\cosh(t)\right)^2}{\left(\frac{\sqrt{3}\sinh(t)-1}{2}\right)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{(2-\sqrt{3}\cosh(t))^2}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{4+3\cosh^2(t)-4\sqrt{3}\cosh(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \frac{7+3\sinh^2(t)-4\sqrt{3}\cosh(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{7+3\sinh^2(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt - 4\int_\alpha^\beta \frac{\sqrt{3}\cosh(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt =$$

$$= \left[\frac{4}{\sqrt{3}\sinh(t)-1}\right]_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta \frac{7+3\sinh^2(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt = 4\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) + \int_\alpha^\beta \frac{7+3\sinh^2(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt =$$

$$= -1 + \int_\alpha^\beta \frac{7+3\sinh^2(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt = -1 + \int_\alpha^\beta \left(1 + \frac{6+2\sqrt{3}\sinh(t)}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\right)\,dt =$$

$$= -1 + (\beta-\alpha) + 2\sqrt{3}\int_\alpha^\beta \frac{\sinh(t)+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt := \gamma + 2\sqrt{3}\lambda$$

con

$$\begin{cases} \gamma = -1 + (\beta-\alpha) = -1 + \ln\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{3+2\sqrt{3}}\right) \\ \lambda = \displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\sinh(t)+\sqrt{3}}{(\sqrt{3}\sinh(t)-1)^2}\,dt \end{cases}$$

Calcoliamo λ per concludere l'esercizio:

$$\lambda = \int_\alpha^\beta \frac{\frac{e^t-e^{-t}+2\sqrt{3}}{2}}{\frac{(\sqrt{3}e^t-\sqrt{3}e^{-t}-2)^2}{4}}\,dt = 2\int_\alpha^\beta \frac{\frac{e^{2t}+2\sqrt{3}e^t-1}{e^t}}{\frac{(\sqrt{3}e^{2t}-2e^t-\sqrt{3})^2}{e^{2t}}}\,dt = 2\int_\alpha^\beta \frac{e^{2t}+2\sqrt{3}e^t-1}{(\sqrt{3}e^{2t}-2e^t-\sqrt{3})^2}\,e^t dt.$$

Effettuiamo il cambio di variabili $e^t = y$ ottenendo

$$\lambda = 2\int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{y^2+2\sqrt{3}y-1}{(\sqrt{3}y^2-2y-\sqrt{3})^2}\,dy = 6\int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{y^2+2\sqrt{3}y-1}{(3y+\sqrt{3})^2(y-\sqrt{3})^2}\,dy.$$

Spezziamo ora l'integranda nella seguente maniera:

$$\frac{y^2+2\sqrt{3}y-1}{(3y+\sqrt{3})^2(y-\sqrt{3})^2} = \frac{Ay+B}{(3y+\sqrt{3})^2} + \frac{Cy+D}{(y-\sqrt{3})^2} \iff$$

$$\iff y^2+2\sqrt{3}y-1 = (Ay+B)(y-\sqrt{3})^2 + (Cy+D)(3y+\sqrt{3})^2 \iff$$
$$\iff y^2+2\sqrt{3}y-1 = y^3(A+9C) + y^2(-2\sqrt{3}A+B+6\sqrt{3}C+9D)+$$
$$+y(3A-2\sqrt{3}B+3C+6\sqrt{3}D) + 3(B+D) \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+9C=0 \\ -2\sqrt{3}A+B+6\sqrt{3}C+9D=1 \\ 3A-2\sqrt{3}B+3C+6\sqrt{3}D=2\sqrt{3} \\ 3(B+D)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=0 \\ D=\frac{1}{6} \end{cases}$$

Indi

$$\lambda = -\int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{3dy}{(3y+\sqrt{3})^2} + \int_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} \frac{dy}{(y-\sqrt{3})^2} = \left[\frac{1}{3y+\sqrt{3}} - \frac{1}{y-\sqrt{3}}\right]_{2+\sqrt{3}}^{\frac{5+2\sqrt{7}}{\sqrt{3}}} =$$

$$= \left(\frac{1}{6\sqrt{3}+2\sqrt{21}} - \frac{\sqrt{3}}{2+2\sqrt{7}} - \frac{1}{6+4\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) = 1 - \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

Recuperando i vari pezzi abbiamo dunque che

$$I = -1 + \ln\left(\frac{5+2\sqrt{7}}{3+2\sqrt{3}} \right) + 2\sqrt{3} - \sqrt{7}.$$

(b) $I := \displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{x-\sqrt{x^2-1}}$: Effettuiamo subito la solita sostituzione $x = \cosh(t)$ ottenendo

$$I := \int_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)-\sinh(t)}\ dt = \int_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} \frac{\sinh(2t)+\cosh(2t)-1}{2}\ dt =$$

$$= \left[\frac{\cosh(2t)+\sinh(2t)}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} = \left[\frac{e^{2t}}{4} - \frac{t}{2} \right]_0^{\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)} =$$

$$= \left(\frac{1}{4}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \right) = \frac{5+3\sqrt{5}}{8} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

(c) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^4-1} = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)(x+1)}$.
Essendo

$$\frac{1}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} \iff$$

$$\iff 1 = x^3(A+C+D) + x^2(B+C-D) + x(C+D-A) + C-B-D \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+C+D=0 \\ B+C=D \\ C+D=A \\ C=B+D+1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=0 \\ B=-\frac{1}{2} \\ C=\frac{1}{4} \\ D=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x-1)(x+1)} = \left[-\frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right]_2^{+\infty} =$$

$$= -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\ln(3) + \frac{1}{2}\arctan(2).$$

(d) $\displaystyle\int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^2+7x+12}\ dx = \int_{-2}^0 x - 7 + \frac{37x+84}{x^2+7x+12}\ dx = \left[\frac{x^2}{2} - 7x \right]_{-2}^0 +$

$$+ \frac{37}{2}\int_{-2}^0 \frac{2x+\frac{168}{37}+7-7}{x^2+7x+12}\ dx = -16 + \frac{37}{2}\left[\ln(x^2+7x+12) \right]_{-2}^0 +$$

$$- \frac{91}{2}\int_{-2}^0 \frac{1}{x^2+7x+12}\ dx = -16 + \frac{37}{2}\ln(6) - \frac{91}{2}\int_{-2}^0 \frac{1}{(x+3)(x+4)}\ dx.$$

Essendo

$$\frac{1}{(x+3)(x+4)} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+4} = \frac{x(A+B)+4A+3B}{(x+3)(x+4)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+B=0 \\ 4A+3B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases}$$

abbiamo che

$$\int_{-2}^{0} \frac{x^3}{x^2+7x+12}\,dx = -16+\frac{37}{2}\ln(6)-\frac{91}{2}\left[\ln\left(\frac{x+3}{x+4}\right)\right]_{-2}^{0} = -16+64\ln(2)-27\ln(3).$$

(e) $I := \displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2\sin(x)+\cos(x)-1}$: Dobbiamo effettuare la sostituzione $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, ottenendo

$$I = -\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{dt}{t(t-2)} = \frac{1}{2}\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} \frac{1}{t} - \frac{1}{t-2}\,dt = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\frac{t}{t-2}\right|\right]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{1} = \frac{1}{2}\ln(2\sqrt{3}-1).$$

(f) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,dx$: Qui ci basta effettuare la sostituzione $x^3-1=t^2$ per ottenere

$$\int_{1}^{2} \frac{x^5}{\sqrt{x^3-1}}\,dx = \frac{2}{3}\int_{0}^{\sqrt{7}} t^2+1\,dt = \frac{2}{3}\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_{0}^{\sqrt{7}} = \frac{20\sqrt{7}}{9}.$$

(g) $I := \displaystyle\int_{\frac{4}{3}}^{2} x\log(1-2x-3x^2)\,dx$: Dobbiamo applicare un'integrazione per parti con $f'(x)=x$ e $g(x)=\ln(1-2x-3x^2)$:

$$\int_{\frac{4}{3}}^{2} x\log(1-2x-3x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1-2x-3x^2)\right]_{\frac{4}{3}}^{2} - \int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{x^2(3x+1)}{3x^2+2x-1}\,dx =$$

$$= 2\ln(15) - \frac{8}{9}\ln(7) - \int_{\frac{4}{3}}^{2} x - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)}\,dx = 2\ln(15) - \frac{8}{9}\ln(7) +$$

$$-\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right]_{\frac{4}{3}}^{2} - \frac{1}{3}\int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)}\,dx = 2\ln(15)-\frac{8}{9}\ln(7)-\frac{8}{9}-\frac{1}{3}\int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)}\,dx.$$

Ora

$$\frac{5x-1}{(3x-1)(x+1)} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{x(A+3B)+A-B}{(3x-1)(x+1)} \iff$$

$$\iff \begin{cases} A+3B=5 \\ A-B=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Quindi

$$I = 2\ln(15) - \frac{8}{9}\ln(7) - \frac{8}{9} - \frac{1}{3}\int_{\frac{4}{3}}^{2} \frac{1}{2}\frac{1}{3x-1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x+1}\,dx =$$

$$= 2\ln(15)-\frac{8}{9}\ln(7)-\frac{8}{9}-\left[\frac{1}{18}\ln(3x-1)+\frac{1}{2}\ln(x+1)\right]_{\frac{4}{3}}^{2} = \frac{35}{18}\ln(5)+\frac{19}{18}\ln(3)-\frac{7}{18}\ln(7)-\frac{8}{9}.$$

NB. Nella risoluzione dell'esercizio abbiamo, ovviamente, considerato $\ln(1-2x-3x^2) = \ln|1-2x-3x^2|$, perché altrimenti l'integrale non sarebbe stato reale.

(h) $I := \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1)^2 |\cos(x)| \ dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)^2 \cos(x) \ dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1)^2 \cos(x) \ dx.$
Entrambi gli integrali si risolvono applicando la regola di integrazione per parti con $f(x) = (x+1)^2$ e $g'(x) = \cos(x)$:

$$I = \Big[(x+1)^2 \sin(x)\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin(x) \ dx - \Big[(x+1)^2 \sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1)\sin(x) \ dx =$$

$$= 3\pi^2 + 4\pi + 4 - 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x+1)\sin(x) \ dx + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (x+1)\sin(x) \ dx.$$

A questo punto dobbiamo applicare un'altra volta la regola di integrazione per parti con $f(x) = x+1$ e $g'(x) = \sin(x)$:

$$I = 3\pi^2 + 4\pi + 4 - 2\left\{[-(x+1)\cos(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \ dx\right\} +$$

$$+2\left\{[-(x+1)\cos(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos(x) \ dx\right\} =$$

$$= 3\pi^2 + 4\pi + 4 - 2\,[\sin(x)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + 2\,[\sin(x)]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} = 3\pi^2 + 4\pi - 4.$$

5. (a) Ricordiamo che

$$\mathrm{Log}(z) = \ln|z| + i \ \arg(z)$$

con $\arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, se $z = x + iy$. Pertanto

$$\mathrm{Log}(-1 - \sqrt{3} \ i) = \ln(2) + i \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) = \ln(2) + i \ \left(\frac{4}{3}\pi + 2k\pi\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Vogliamo vedere quali sono le radici terze di i : per fare questo poniamo $z = \sqrt[3]{i}$ e troviamo che

$$z^3 = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Longrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{6} + \frac{2ki\pi}{3}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Dunque

$$\sqrt[3]{i} = \begin{cases} e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} \\ e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i \end{cases}$$

(c) $(1+i)^i = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4} + 2ki\pi})^i = (\sqrt{2})^i e^{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi} = (\sqrt{2})^i e^{-\frac{\pi}{4}(8k+1)} \ \forall \ k \in \mathbb{Z}.$
Scriviamo $(\sqrt{2})^i = 2^{\frac{i}{2}}$ nella forma $x + iy$:

$$2^{\frac{i}{2}} = x + iy \Longleftrightarrow e^{\mathrm{Log}\left(2^{\frac{i}{2}}\right)} = e^{\mathrm{Log}(x+iy)} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \frac{i}{2}\ln(2) = \mathrm{Log}(x+iy) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + i \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Tale uguaglianza é verificata se e solo se

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\ln(2)}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y = x\tan\left(\frac{\ln(2)}{2}\right) \\ x^2\left(1 + \tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)\right) = 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} \\ y = \frac{\tan\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} \end{cases}$$

Ergo

$$(1+i)^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} + i\,\frac{\tan\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}{\sqrt{1+\tan^2\left(\frac{\ln(2)}{2}\right)}} \right) e^{-\frac{\pi}{4}(8k+1)} \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}.$$

6. (a) Abbiamo che

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n-2)n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)}{(n-2)} \frac{(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Verifichiamo la convergenza sul bordo del disco di convergenza :

$$\left| \frac{(n-2)!}{n^n} z^n \right| = \frac{(n-2)!}{n^n} e^n = \frac{n!}{n^n} \frac{e^n}{(n-1)n} \approx \sqrt{2\pi n} \frac{n^n}{e^n} \frac{e^n}{n^{n+1}(n-1)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}(n-1)} \approx \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{\frac{3}{2}}}$$

poiché per la formula di Stirling $n! \approx \frac{n^n}{e^n}\sqrt{2\pi n}$ e $\frac{1}{\sqrt{n}(n-1} \approx \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ per il criterio di infinitesimo. Dunque la serie converge anche sul bordo del disco di convergenza. Pertanto possiamo concludere che la serie converge se e solo se $|z| \leq e$.

(b) Per studiare questa serie effettuiamo il cambio di variabili $w = -(2z)^2$ riconducendoci, cosí, a studiare la serie di potenze

$$\sum_{n\geq 1} \frac{w^n}{2n}.$$

In tal caso abbiamo che

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2n}}} = 1.$$

E' evidente che se $|w| = 1$ la serie diverge. Riapplicando il cambio di variabili abbiamo dunque che $R = \frac{1}{2}$ e per lo stesso motivo se $|z| = \frac{1}{2}$ la serie diverge. Non vi é dunque convergenza sul bordo del disco di convergenza, cioé la serie converge se e solo se $|z| < \frac{1}{2}$.