Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini
Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 3 - 7 Marzo 2014

1. **Teorema di De L'Hopital** : Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono due funzioni reali di variabile reale continue in $[a, b]$ e derivabili in (a, b) con $-\infty \le a < b \le +\infty$.
Sia $g'(x) \neq 0 \ \forall \ x \in (a, b)$, tranne al piú in $c \in (a, b)$. Sia inoltre

$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = 0 \quad \text{oppure} \quad \lim_{x\to c} |f(x)| = \lim_{x\to c} |g(x)| = \infty$$

ed esista

$$\lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \ .$$

Allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = L \ .$$

Sfruttiamolo per la risoluzione dell'esercizio (partiremo sempre dal presupposto che il limite del rapporto tra le derivate esista per non prolungarci troppo):

(a) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln(x+1))}{\ln(x)}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Applichiamo il teorema :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln(x+1))}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{(x+1)\ln(x+1)}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1)} \ .$$

A questo punto abbiamo una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$, quindi possiamo applicarlo di nuovo ottenendo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\ln(x+1))}{\ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln(x+1)+1} = 1 \ ;$$

(b) $\lim_{x\to(-1)^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.
Applichiamo il teorema :

$$\lim_{x\to(-1)^+} \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)+1}{\sqrt[4]{1-x^2}} = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{-\frac{x}{2\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}} = -\lim_{x\to(-1)^+} \frac{\pi\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sqrt[4]{(1-x^2)^3}}{x} = 0 \ ;$$

(c) $\lim_{x\to 0} (\sin(x))^{\tan(x)}$ é una forma indeterminata del tipo 0^0 quindi non sembra possibile l'applicazione del teorema. Tuttavia

$$\lim_{x\to 0} (\sin(x))^{\tan(x)} = \lim_{x\to 0} e^{\tan(x)\ln(\sin(x))} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)}}$$

e $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e quindi possiamo applicare il teorema :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\cot(x)}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = -\lim_{x\to 0} \sin(x)\cos(x) = 0$$

che ci dice che

$$\lim_{x\to 0}(\sin(x))^{\tan(x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(x))}{\cot(x)}} = e^0 = 1 \ ;$$

(d) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)}\right)$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Applichiamo il teorema :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} =_{(*)} \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) + x\cos(x)}{2\cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

ove in $(*)$ abbiamo applicato nuovamente il teorema essendo $\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{\sin(x) + x\cos(x)}$ una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$;

(e) $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-1}{4\sqrt[3]{2x+5}+7}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Proviamo ad applicare il teorema :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-1}{4\sqrt[3]{2x+5}+7} =^{?} \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+3}}}{\frac{8}{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}}{16\sqrt{x+3}} \ .$$

Notiamo che

$$\frac{\sqrt[3]{(2x+5)^2}}{\sqrt{x+3}} \approx \sqrt[6]{x} \quad \text{per} \quad x \to +\infty$$

per concludere che il teorema non puó essere applicato, essendo il valore del limite non finito.
Tuttavia, essendo $\frac{\sqrt{x+3}-1}{4\sqrt[3]{2x+5}+7} \approx \sqrt[6]{x}$, abbiamo comunque che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+3}-1}{4\sqrt[3]{2x+5}+7} = +\infty \ ;$$

(f) $\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}}$ é una forma indeterminata del tipo 1^∞, indi non possiamo applicare il teorema. Tuttavia

$$(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln(e^x+x)}{x}} \quad \text{e} \quad \frac{\ln(e^x + x)}{x}$$

é una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Applichaimo, dunque, il teorema :

$$\lim_{x\to 0}(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1}{e^x+x}} = e^2 \ ;$$

(g) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\tan(x))}{\cot(x)}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Applichiamo il teorema :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\tan(x))}{\cot(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{\sin(x)\cos(x)}}{-\frac{1}{\sin^2(x)}} = -\lim_{x\to 0^+}\tan(x) = 0 \ ;$$

(h) $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-e^{x}}{x^3-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2\sinh(x)}{x^3-1}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.
Tuttavia (applicando ipoteticamente il teorema finché abbiamo forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$) abbiamo che

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = -2\frac{\cosh(x)}{3x^2} \ , \quad \frac{f''(x)}{g''(x)} = -\frac{1}{3}\frac{\sinh(x)}{x} \ , \quad \frac{f'''(x)}{g'''(x)} = -\frac{1}{3}\cosh(x)$$

che non converge per $x \to +\infty$. Pertanto il teorema non si puó applicare.
Comunque il limite é risolvibile per ordini di infinitesimo, ed abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}-e^{x}}{x^3-1} = -\infty \ ;$$

(i) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x^2-1}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1-\ln(x)}{\ln(x)(x^2-1)}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$. Ma

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x-\frac{1}{x}}{\frac{x^2-1}{x}+2x\ln(x)} = \frac{2x^2-1}{x^2-1+2x^2\ln(x)} \longrightarrow_{x\to 1} \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad x\to 1^+ \\ -\infty & \text{se} \quad x \to 1^- \end{cases}$$

e quindi il teorema non é applicabile.
Per calcolare questo limite (o per meglio dire, per mostrare che non esiste) sfruttiamo gli sviluppi di Taylor (vedere Esercizio 5. per ulteriori informazioni al riguardo) :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1-\ln(x)}{\ln(x)(x^2-1)} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2+2y-\ln(y+1)}{y(y+2)\ln(y+1)}$$

con il cambio di variabile $y = x-1$. Essendo $\ln(y+1) = y + o(y)$ abbiamo che

$$\lim_{y\to 0} \frac{y^2+2y-\ln(y+1)}{y(y+2)\ln(y+1)} = \lim_{y\to 0}\frac{y+o(y)}{2y^2+o(y)} = \lim_{y\to 0}\frac{1+o(1)}{2y+o(y)} = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad y\to 0^+ \\ -\infty & \text{se} \quad y\to 0^- \end{cases} \ ;$$

(j) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$ é una forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$.
Tuttavia

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2\cot(x)\sqrt{1-\cos(x)} = 2\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\frac{|\sin(x)|}{\sqrt{1+\cos(x)}} \longrightarrow_{x\to 0} \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se} \quad x\to 0^+ \\ -\sqrt{2} & \text{se} \quad x\to 0^- \end{cases}$$

quindi non possiamo applicare il teorema.
Analogamente

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}} = \frac{\sin(x)}{|\sin(x)|}\sqrt{1+\cos(x)} \longrightarrow_{x\to 0} \begin{cases} \sqrt{2} & \text{se} \quad x\to 0^+ \\ -\sqrt{2} & \text{se} \quad x\to 0^- \end{cases} .$$

2. Per svolgere questo esercizio potremmo utilizzare gli sviluppi di Taylor noti. Tuttavia calcoleremo gli sviluppi richiesti a mano cosí da imparare come farli. Inanzitutto cominciamo col dire che uno sviluppo di MacLaurin é uno sviluppo di Taylor nel punto $x_0 = 0$; pertanto dovremo scivere $f(x)$ come segue

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n$$

con $f^{(n)}(0) = \frac{d^n}{dx^n} f(0)$, cioé la derivata n-esima di $f(x)$ calcolata in $x = 0$.
Sviluppare le funzioni date fino al quarto ordine significa troncare la serie al termine $n = 4$ ed inglobare il resto della serie nell' $o(x^4)$.
Ricordiamo, per completezza, che $f(x)$ si dice un **o-piccolo** di $g(x)$, in notazione $f(x) = o(g(x))$, se

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ .$$

Dopo questo piccolo ripasso possiamo svolgere gli esercizi :

(a) Sia $f_1(x) = (e^{3x} - 1)\sin(2x)$. Ci interessa colcolare $f_1(0), f_1'(0), \cdots, f_1''''(0)$, quindi calcoliamo le quattro derivate richieste :

$$f_1(0) = 0$$

$$f_1'(x) = 3e^{3x}\sin(2x) + 2(e^{3x} - 1)\cos(2x) \Longrightarrow f_1'(0) = 0$$
$$f_1''(x) = 9e^{3x}\sin(2x) + 12e^{3x}\cos(2x) - 4f_1(x) \Longrightarrow f_1''(0) = 12$$
$$f_1'''(x) = 3e^{3x}\sin(2x) + 54e^{3x}\cos(2x) - 4f_1'(x) \Longrightarrow f_1'''(0) = 54$$
$$f_1''''(x) = -99e^{3x}\sin(2x) + 168e^{3x}\cos(2x) - 4f_1''(x) \Longrightarrow f_1''''(0) = 120$$

Dunque

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!}\ x^n + o(x^4) = 6x^2 + 9x^3 + 5x^4 + o(x^4) \ ;$$

(b) Sia $f_2(x) = \ln(\cos(x))$. Calcoliamo le derivate che ci interessano :

$$f_2(0) = 0$$

$$f_2'(x) = -\tan(x) \Longrightarrow f_2'(0) = 0$$
$$f_2''(x) = -1 - (f_2'(x))^2 \Longrightarrow f_2''(0) = -1$$
$$f_2'''(x) = -2f_2'(x)f_2''(x) \Longrightarrow f_2'''(0) = 0$$
$$f_2''''(x) = -2(f_2''(x))^2 - 2f_2'(x)f_2'''(x) \Longrightarrow f_2''''(0) = -2$$

Dunque

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f_2^{(n)}(0)}{n!}\ x^n + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \ ;$$

(c) Sia $f_3(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$. Calcoliamo le derivate che ci interessano :

$$f_3(0) = 1$$

$$f_3'(x) = -(2x+1)(f_3(x))^2 \Longrightarrow f_3'(0) = -1$$
$$f_3''(x) = -2(f_3(x))^2 - 2(2x+1)f_3(x)f_3'(x) \Longrightarrow f_3''(0) = 0$$
$$f_3'''(x) = -8f_3(x)f_3'(x) - 2(2x+1)[(f_3'(x))^2 + f_3(x)f_3''(x)] \Longrightarrow f_3'''(0) = 6$$
$$f_3''''(x) = -12[(f_3'(x))^2 + f_3(x)f_3''(x)] - 2(2x+1)[3f_3'(x)f_3''(x) + f_3(x)f_3'''(x)] \Longrightarrow f_3''''(0) = -24$$

Dunque

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{4} \frac{f_3^{(n)}(0)}{n!}\ x^n + o(x^4) = 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4) \ ;$$

(d) Sia $f_4(x) = \frac{\ln(1+\sin(x))}{e^{\tan(x)}}$. In tal caso fare le derivate a mano risulta incredibilmente difficoltoso, quindi applicheremo gli sviluppi di McLaurin noti :

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$
- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)$
- $e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$

Quindi

$$f_4(x) = \ln\left(1 + x - \frac{x^3}{6}\right) e^{-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} \approx \left(x - \frac{x^3}{6}\right) e^{-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^2 e^{-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} +$$

$$+\frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^3 e^{-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} - \frac{1}{4}\left(x - \frac{x^3}{6}\right)^4 e^{-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} \approx$$

$$\approx \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right) e^{-\left(x+\frac{x^3}{3}\right)} \approx$$

$$\approx \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12}\right)\left(1 - \left(x + \frac{x^3}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^3\right)$$

ove il simbolo "$\approx$" é stato messo per evitare di mettere tutti gli o-piccoli necessari. Quindi (svolgendo i prodotti e mettendo dentro all'o-piccolo tutte le potenze di grado eccessivo dello sviluppo) abbiamo che

$$f_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right)\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) =$$

$$= x - x^2 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4) = x - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{7}{6}\,x^3 - x^4 + o(x^4)\ .$$

3. In questo esercizio, rispetto al precedente, non é richiesto di fermarci ad un certo ordine, ergo dobbiamo scrivere

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n\ .$$

Per fare questo dovremo trovare una maniera di scrivere $f^{(n)}(0)$ che vada bene $\forall\ n$. Come visto nell'esercizio 2. (a) é possibile sfruttare gli sviluppi noti e sostituire all'interno di essi il nuovo argomento.
Attenzione peró : ció si puó fare solo se l'argomento dello sviluppo utilizzato e quello che si vuole trovare hanno lo stesso valore per $x \to 0$.
Esempio : Per sviluppare $\ln(1 + \sin(x))$ possiamo utilizzare lo sviluppo di $\ln(1 + x)$ perché

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 = \lim_{x\to 0} x\ ;$$

Se invece vogliamo sviluppare $\ln(1+\cos(x))$ allora non possiamo utilizzare lo sviluppo di $\ln(1 + x)$ perché

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0} x\ .$$

Vediamo di applicare questo concetto, quando possibile, ai seguenti esercizi :

(a) e^{-3x^2} : Poiché

$$\lim_{x\to 0} x = 0 = \lim_{x\to 0} -3x^2$$

possiamo sostituire $-3x^2$ ad x nello sviluppo di e^x . Quindi, essendo

$$e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \quad \text{abbiamo che} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-3x^2)^n}{n!} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \; 3^n \; x^{2n} \; ;$$

(b) $f(x) = 2^{x-1}$: In questo caso non abbiamo nessuno sviluppo noto che ci viene incontro, indi cerchiamo di calcolare il valore di $f^{(n)}(0) \; \forall \; n$. Per fare questo calcoliamo le derivate della funzione fino a che non capiamo l'andamento di $f^{(n)}(0)$:

$$f(0) = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = 2^{x-1}\ln(2) \Longrightarrow f'(0) = \frac{\ln(2)}{2}$$

$$f''(x) = 2^{x-1}\ln^2(2) \Longrightarrow f''(0) = \frac{\ln^2(2)}{2}$$

Se non si fosse ancora capito l'andamento si puó continuare a derivare quanto si vuole. Tuttavia, in tal caso, pare abbastanza chiaro che

$$f^{(n)}(0) = \frac{\ln^n(2)}{2}$$

quindi

$$2^{x-1} = \sum_{n\geq 0} \frac{\ln^n(2)}{2} \; \frac{x^n}{n!} \; ;$$

(c) $\sin(x^2) - \sinh(x^2)$: Poiché

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 = \lim_{x\to 0} x$$

possiamo utilizzare gli sviluppi di $\sin(x)$ e $\sinh(x)$, cioé

$$\sin(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \; x^{2n+1} \quad \text{e} \quad \sinh(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \; .$$

Quindi

$$\sin(x^2) - \sinh(x^2) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \; x^{4n+2} - \sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} \; [(-1)^n - 1]$$

$$\Longrightarrow \sin(x^2) - \sinh(x^2) = -2 \sum_{k\geq 0} \frac{x^{8k+6}}{(4k+3)!}$$

poiché il termine $(-1)^n - 1 = \begin{cases} 0 & \text{se } \; n = 2k \\ -2 & \text{se } \; n = 2k+1 \end{cases}$;

(d) $\ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right)$: Utilizziamo gli sviluppi noti

$$\ln(1+x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n \quad \text{e} \quad \ln(1-x) = -\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \ .$$

Quindi

$$\frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) = -\frac{1}{2}\left(\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}\, x^n \ - \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}[(-1)^n - 1]$$

$$\Longrightarrow \ln\left(\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right) = \sum_{k\geq 0} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

per lo stesso motivo dell'esercizio (c) .
Osservazione : La funzione dell'esercizio (d) altri non é se non $\tanh^{-1}(x)$.

4. Questo esercizio é molto simile all'esercizio 2. . Tuttavia in questo caso si parla di sviluppi di Taylor veri e propri essendo $x_0 \neq 0$. L'unica differenza risiede nel fatto che dovremo usare la formula

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x - x_0)^n \ .$$

(a) $f_1(x) = (x-6)^5$: Calcoliamo le derivate richieste nel punto $x_0 = 6$

$$f_1(6) = 0$$

$$f_1'(x) = 5(x-6)^4 \Longrightarrow f_1'(6) = 0$$
$$f_1''(x) = 20(x-6)^3 \Longrightarrow f_1''(6) = 0$$
$$f_1'''(x) = 60(x-6)^2 \Longrightarrow f_1'''(6) = 0$$
$$f_1''''(x) = 120(x-6) \Longrightarrow f_1''''(6) = 0$$

dunque $f_1(x) = o((x-6)^4)$. Ovviamente l'esercizio era solo un test di verifica in quanto, ovviamente

$$(x-6)^5 = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(6)}{n!}(x-6)^n \Longleftrightarrow \begin{cases} f^{(5)}(6) = 120 \\ f^{(n)}(6) = 0 \ \ \forall\, n \neq 5 \end{cases} \qquad ;$$

(b) $f_2(x) = \ln(x)$: Calcoliamo le derivate richieste nel punto $x_0 = 2$

$$f_2(2) = \ln(2)$$

$$f_2'(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f_2'(2) = \frac{1}{2}$$
$$f_2''(x) = -\frac{1}{x^2} \Longleftrightarrow f_2''(2) = -\frac{1}{4}$$
$$f_2'''(x) = \frac{2}{x^3} \Longleftrightarrow f_2'''(2) = \frac{1}{4}$$

Dunque

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f_2^{(n)}(2)}{n!}\, (x-2)^n + o((x-2)^3) = \ln(2) + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(x-2)^3}{24} + o((x-2)^3)$$

(c) $f_3(x) = e^x$: Essendo la derivata di e^x pari ad e^x abbiamo che i coefficienti dello sviluppo di Taylor in $x_0 = -1$ sono tutti pari ad $\frac{1}{e}$, quindi

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{3} \frac{f_3^{(n)}(-1)}{n!}\ (x+1)^n + o((x+1)^3) = \frac{1}{e} + \frac{x+1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2e} + \frac{(x+1)^3}{6e} + o((x+1)^3)\ ;$$

(d) $f_4(x) = \sin(x)$: Calcoliamo le derivate richieste nel punto $x_0 = \frac{\pi}{2}$

$$f_4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f_4'(x) = \cos(x) \Longrightarrow f_4'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f_4''(x) = -\sin(x) \Longrightarrow f_4''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

$$f_4'''(x) = -\cos(x) \Longrightarrow f_4'''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$f_4''''(x) = \sin(x) \Longrightarrow f_4''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f_4'''''(x) = \cos(x) \Longrightarrow f_4'''''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Dunque

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{5} \frac{f_4^{(n)}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{n!}\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^n + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)$$

$$\Longrightarrow f_4(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5\right)\ .$$

5. Per calcolare i seguenti limiti utilizzando gli sviluppi di Taylor ci basterá sostituire lo sviluppo delle funzioni note opportunamente (nel senso che bisognerá stare attenti a come gestire gli o-piccoli) . Dopo aver visto un paio di esempi dovrebbe risultare abbastanza semplice capire come regolarsi :

(a) $\lim_{x\to 0}\left(\cot^2(x) - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos^2(x) - \sin^2(x)}{x^2\sin^2(x)}$: Gli sviluppi che ci interessa utilizzare sono

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Con essi abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\left(\cot^2(x) - \frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2}{x^2\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right) - \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{x^2\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x^4 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{2}{3} + o(1)}{1 + o(1)} = -\frac{2}{3}\ ;$$

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1-2x) + 2x}$: Gli sviluppi che dobbiamo utilizzare sono

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Con l'ausilio di tali sviluppi abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{\ln(1-2x) + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{-2x - 2x^2 + o(x^2) + 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{-2 + o(1)} = -\frac{1}{4} \,;$$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2) - x^2}{\ln(3+2x)x^2(x^2 - \sin^2(x))}$: Gli sviluppi che dobbiamo utilizzare sono

- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

a cui va aggiunto lo sviluppo di $\ln(3 + 2x)$ che dobbiamo calcolarci. Tuttavia, senza calcolarlo, possiamo di certo concludere che $\ln(3 + 2x) = \ln(3) + o(x)$, che ci basta per giungere al risultato del limite. Sostituendo tali sviluppi otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x^2) - x^2}{\ln(3+2x)x^2(x^2 - \sin^2(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 + \frac{x^6}{3} + o(x^6) - x^2}{(\ln(3) + o(x))\, x^2 \left(x^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{3} + o(x^6)}{(\ln(3)x^2 + o(x^3)) \left(x^2 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^6}{3} + o(x^6)}{\frac{\ln(3)}{3}\, x^6 + o(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + o(1)}{\frac{\ln(3)}{3} + o(1)} = \frac{1}{\ln(3)} \,;$$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \ln(1+3x) - 1}{\sin(x) - x}$: Gli sviluppi che dobbiamo utilizzare sono

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $\ln(1+x) = x + o(x)$

Tramite essi otteniamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x} - \ln(1+3x) - 1}{\sin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x - 3x - 1 + o(x)}{x - \frac{x^3}{6} - x + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2 + o(1)}{-\frac{x^2}{6} + o(x^2)} = +\infty \,;$$

(e) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)[\cos(5\tan(x)) - \cos(5\sin(x))] + 5x^4}{2x^4 + \sin(x^5) - x^6}$: Gli sviluppi che dobbiamo utilizzare sono

- $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

Tramite essi otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)[\cos(5\tan(x)) - \cos(5\sin(x))] + 5x^4}{2x^4 + \sin(x^5) - x^6} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+o(x))\left(\cos\left(5x + \frac{5}{3}\ x^3 + o(x^3)\right) - \cos\left(5x - \frac{5}{6}\ x^3 + o(x^3)\right)\right) + 5x^4}{2x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+o(x))\left(1 - \frac{1}{2}\left(5x + \frac{5}{3}\ x^3 + o(x^3)\right)^2 - 1 + \frac{1}{2}\left(5x - \frac{5}{6}\ x^3 + o(x^3)\right)^2\right) + 5x^4}{2x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+o(x))\left(-\frac{1}{2}\left(25x^2 + \frac{50}{3}\ x^4 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(25x^2 - \frac{25}{3}\ x^4 + o(x^4)\right)\right) + 5x^4}{2x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+o(x))\left(-\frac{25}{2}\ x^4 + o(x^4)\right) + 5x^4}{2x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{25}{2}\ x^4 + 5x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{15}{2} + o(1)}{2 + o(1)} = -\frac{15}{4}\ ;$$

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1+x^8} - \sqrt[3]{1+x^8}}$: Gli sviluppi che dobbiamo utilizzare sono

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + o(x)$
- $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

Quindi abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^4) - 1}{\sqrt{1+x^8} - \sqrt[3]{1+x^8}} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{x^8}{2} + o(x^8) - 1}{1 + \frac{x^8}{2} - 1 - \frac{x^8}{3} + o(x^8)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + o(1)} = -3\ ;$$

(g) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(x)\cos(x) - \sin(x) - \cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2}$: Effettuiamo la sostituzione $y = x - \frac{\pi}{2}$ per ottenere che

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(x)\cos(x) - \sin(x) - \cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1 + \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right)\cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(y + \frac{\pi}{2}\right)}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1 - \sin(y)\cos(y) - \cos(y) + \sin(y)}{y^2}$$ a cui possiamo applicare gli sviluppi

- $\sin(y) = y + o(y)$
- $\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$

per ottenere che

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin(x)\cos(x) - \sin(x) - \cos(x)}{(x - \frac{\pi}{2})^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1 - (y + o(y))\left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) - \left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right) + (y + o(y))}{y^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{1 - y - 1 + \frac{y^2}{2} + y + o(y^2)}{y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{1} = \frac{1}{2}\ ;$$

(h) $\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]x$: Effettuiamo la sostituzione $x=\frac{1}{y}$ per ottenere che

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]x=\lim_{y\to0}\left(\frac{\ln(1+y)}{y}-1\right)\frac{1}{y}=\lim_{y\to0}\frac{\ln(1+y)-y}{y^2}\ .$$

Applicando lo sviluppo $\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)$ otteniamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right]x=\lim_{y\to0}\frac{y-\frac{y^2}{2}+o(y^2)-y}{y^2}=\lim_{y\to0}\frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1}=-\frac{1}{2}\ .$$

6. • $xy\le\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$ con $x,y\ge0$ e $p,q>1:\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.
Notiamo che la funzione $f(x)=e^x$ é una funzione convessa : difatti

$$\frac{d^2}{dx^2}e^x=e^x>0\ \forall\ x\in\mathbb{R}$$

e per quanto visto a lezione sappiamo che se la derivata seconda di una funzione é positiva in un intervallo, allora la funzione é convessa nell'intervallo .
La definizione di convessitá di una funzione ci dice che una funzione convessa $f(x)$ rispetta la condizione :

$$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\le\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1),\ \lambda\in[0,1]\ .$$

Sia

$$\lambda=\frac{1}{p}\quad\text{e siano}\quad x_1=\ln(y^q)\quad\text{e}\quad x_2=\ln(x^p)\ .$$

Allora

$$xy=e^{\ln(xy)}=e^{\ln(x)+\ln(y)}=e^{\frac{1}{p}\ln(x^p)+\frac{1}{q}\ln(y^q)}=f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\le_{(*)}$$

$$\le\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)=\frac{1}{p}e^{\ln(x^p)}+\frac{1}{q}e^{\ln(y^q)}=\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q}$$

ove in $(*)$ abbiamo usato la convessitá di e^x ;

• $(a+b)^p\le2^{p-1}(a^p+b^p)$ con $a,b\ge0$ e $p>1$.
Notiamo che la funzione $f(x)=x^p$ é convessa per $x\ge0$ e $p>1$, difatti

$$\frac{d^2}{dx^2}x^p=p(p-1)x^{p-1}\ge0\ \forall\ x\ge0,\quad\text{se}\quad p>1\ .$$

Dunque per $f(x)=x^p$ e $\lambda\in[0,1]$ vale la disuguaglianza del precedente punto.
Utilizziamola con $\lambda=\frac{1}{2}$, $x_1=b$ e $x_2=a$. Abbiamo che

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^p=f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\le_{(*)}\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1)=\frac{a^p}{2}+\frac{b^p}{2}$$

ove in $(*)$ abbiamo usato la convessitá di x^p. Quindi

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2}\right)^p\le\frac{a^p}{2}+\frac{b^p}{2}\Longrightarrow\frac{(a+b)^p}{2^p}\le\frac{a^p+b^p}{2}\Longrightarrow(a+b)^p\le2^{p-1}(a^p+b^p)\ .$$

7. I candidati ad essere punti di massimo o minimo di $f(x)$ in $[a,b]$ sono :

   - Gli estremi dell'intervallo considerato ;
   - Gli $x_0 \in [a,b]$ tali che $f'(x_0)$;
   - I punti di non derivabilitá di $f(x)$ in $[a,b]$.

   Detto questo partiamo con la risoluzione dell'esercizio :

   (a) $f(x) = x^4 - x^2$ in $[-2,2]$: Abbiamo che $f(2) = f(-2) = 12$ e

   $$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2} .$$

   Essendo $f(0) = 0$ e $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ abbiamo che il valore minimo assunto dalla funzione nell'intervallo $[-2,2]$ é $-\frac{1}{4}$ raggiunto quando $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, mentre il valore massimo raggiunto da $f(x)$ é 12, assunto dalla funzione ai bordi dell'intervallo considerato ;

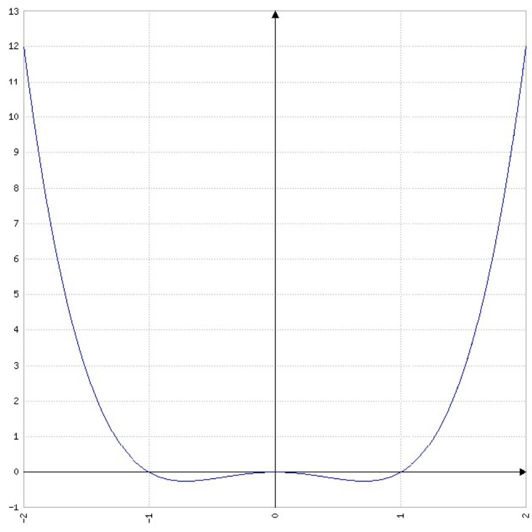

   Figura 1: Grafico della funzione $f(x) = x^4 - x^2$ nell'intervallo $[-2,2]$.

   (b) $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ in $[-2,3]$: Abbiamo che $g(-2) = -\frac{2}{5}$, $g(3) = \frac{3}{10}$ e

   $$g'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = \pm 1 .$$

   Essendo $g(1) = \frac{1}{2}$ e $g(-1) = -\frac{1}{2}$ e poiché

   $$-\frac{1}{2} < -\frac{2}{5} \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} > \frac{3}{10}$$

   abbiamo che nei punti $x = \pm 1$ la funzione raggiunge i suoi valori di massimo/minimo pari a $\pm\frac{1}{2}$;

   (c) $h(x) = \sin|x| - |\sin(x)|$ in $[-9,9]$: Cominciamo inanzitutto con il capire come é fatta la funzione che vogliamo analizzare ; essendo

   $$h_1(x) := \sin|x| = \begin{cases} \sin(x) & \text{se } \ x > 0 \\ -\sin(x) & \text{se } \ x < 0 \end{cases}$$

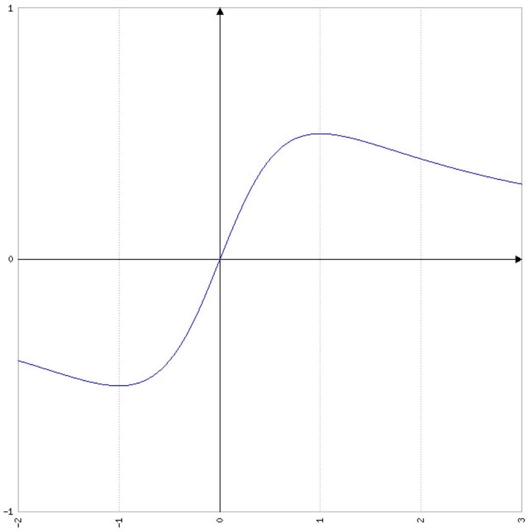

Figura 2: Grafico della funzione $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$ nell'intervallo $[-2, 3]$.

e

$$h_2(x) := -|\sin(x)| = \begin{cases} -\sin(x) & \text{se} \quad \sin(x) > 0 \\ \sin(x) & \text{se} \quad \sin(x) < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} -\sin(x) & \text{se} \quad x \in [-2\pi, -\pi] \cup [0, \pi] \cup [2\pi, 9] \\ \sin(x) & \text{se} \quad x \in [-9, -2\pi] \cup [-\pi, 0] \cup [\pi, 2\pi] \end{cases}$$

$$\Longrightarrow h(x) = h_1(x) + h_2(x) = \begin{cases} 2\sin(x) & \text{se} \quad x \in [\pi, 2\pi] \\ -2\sin(x) & \text{se} \quad x \in [-2\pi, -\pi] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

quindi il suo grafico é

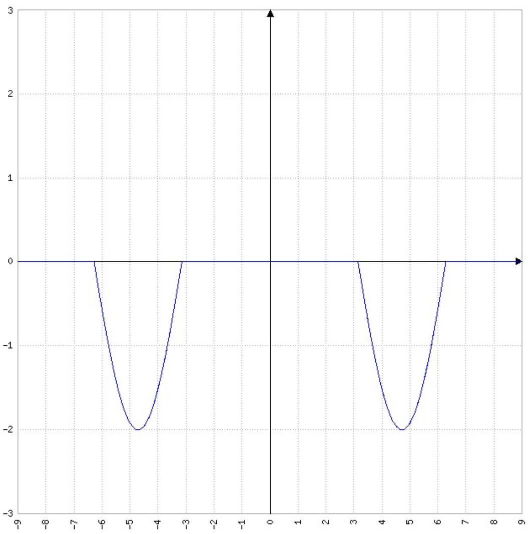

Figura 3: Grafico della funzione $h(x) = \sin|x| - |\sin(x)|$ nell'intervallo $[-9, 9]$.

Pare evidente che il massimo valore assumibile dalla funzione é 0, mentre il valore minimo che assume é -2, raggiunto quando $x = \pm\frac{3}{2}\ \pi$;

(d) $v(x) = x - \ln(2+x)$ in $(-\infty, +\infty)$: Partiamo con il notare che il dominio della funzione é $D = \{x \in \mathbb{R} : x > -2\}$, altrimenti il logaritmo non sarebbe definito. Essendo

$$\lim_{x \to -2^+} v(x) = \lim_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$$

abbiamo che

$$\sup_{x \in (-2, +\infty)} v(x) = +\infty \ .$$

Questo fatto presagisce la presenza di un minimo (non avendo la funzione discontinuitá nell'intervallo $(-2, +\infty)$). Essendo

$$v'(x) = 1 - \frac{1}{x+2} = \frac{x+1}{x+2} = 0 \Longleftrightarrow x = -1$$

abbiamo che il minimo valore della funzione é raggiunto quando $x = -1$ ed é pari a -1 .

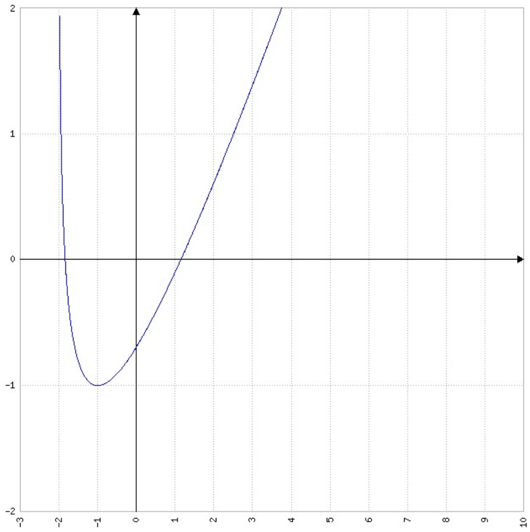

Figura 4: Grafico della funzione $v(x) = x - \ln(2+x)$ nell'intervallo $(-2, +\infty)$.