Universitá degli Studi Roma Tre - Corso di Laurea in Matematica

Tutorato di AM120

A.A. 2013-2014 - Docente: Prof. G.Mancini

Tutore: Matteo Bruno ed Emanuele Padulano

Soluzioni 4 - 14 Marzo 2014

1. Per studiare il grafico di una funzione abbiamo bisogno di una serie di informazioni ottenibili seguendo il seguente procedimento :

   - In primo luogo bisogna studiare il **dominio** D della funzione, cioé l'insieme dei punti in cui la funzione risulta essere definita ;
   - Dopo aver calcolato il dominio passeremo a studiare il **segno** della funzione, cioé in che intervalli la funzione risulta essere sopra l'asse delle ascisse e in quali sotto ad esso ;
   - Il passo successivo sará lo studio del comportamento che ha la funzione presso i punti di discontinuitá (**asintoti verticali**) e quando tende a $\pm\infty$ (**asintoti orizzontali o obliqui**) ; in altre parole
     - Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \Longrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{x_0}$ si dice **asintoto verticale** ;
     - Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbf{y} = \alpha$ si dice **asintoto orizzontale** ;
     - Nel caso in cui non esista asintoto orizzontale potrebbe esistere un **asintoto obliquo** ; in tale caso esso avrá la forma $\mathbf{y} = \mathbf{mx} + \mathbf{q}$ con
       $$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$
       e
       $$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx,\ q \in \mathbb{R}\ .$$
       Se m riultasse nullo, allora la funzione non possederá né asintoti orizzontali né asintoti obliqui ;
   - Studiati i primi 3 punti passeremo a studiare la derivata della funzione : i punti in cui essa si annulla saranno i candidati ad essere **massimi/minimi**. Per capire questo abbiamo due possibilitá :
     - Studiare il segno della derivata prima : quando la derivata risulta essere positiva significa che la funzione sta "crescendo", mentre se la derivata é negativa la funzione sta "decrescendo" ; i punti in cui avviene il passaggio sono i massimi/minimi della funzione (a seconda che in tali punti la funzione passi da crescente a decrescente o viceversa) ;
     - Studiare il valore della derivata seconda nei punti in cui si annula la derivata prima : cosí facendo otterremo un massimo in un punto $x_1 : f'(x_1) = 0$ se $f''(x_1) < 0$, mentre se risulterá essere $f''(x_1) > 0$ avremo che x_1 é un punto di minimo per $f(x)$;
   - Studiati massimi/minimi mancherá solo da scoprire la **concavitá/convessitá** della funzione : per fare questo calcoleremo la derivata seconda e vedremo i punti in cui essa si annulla (i **flessi** della funzione) ; se in un intervallo la derivata seconda sará positiva avremo che la funzione sará convessa in tale intervallo, viceversa sará concava .

Seguiti questi cinque passi saremo in grado di disegnare la funzione $f(x)$ alla perfezione (scusandoci preventivamente per la qualitá delle immagini caricate).
NB. Nella risoluzione dell'esercizio (c) é possibile trovare delle nozioni aggiuntive su particolari casi di punti di non derivabilitá.

(a) $a(x) = x^4 - x^2 + 4$: In questo caso la funzione non ha punti di discontinuitá , quindi $D \equiv \mathbb{R}$. Vediamo di capire il segno di $a(x)$: Poniamo $x^2 = z$ ottenendo $a(z) = z^2 - z + 4$; tale polinomio di secondo grado ha discriminante negativo, ergo é sempre positivo. Pertanto anche $a(x)$ risulta essere sempre positiva .
Non avendo punti di discontinuitá la funzione non ha asintoti verticali.
Essendo
$$\lim_{x\to\pm\infty} a(x) = +\infty$$
abbiamo che non possiede nemmeno asintoti orizzontali. Vediamo di capire se vi sono asintoti obliqui :
$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 - x + \frac{4}{x} = \pm\infty$$
dunque la funzione non ha nessun tipo di asintoto.
Possiamo passare, ora, allo studio della derivata : $a'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1)$.
Vediamo il segno di $a'(x)$:
$$a'(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \wedge x \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Longleftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 0 \wedge x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
dunque $a(x)$ decresce fino ad $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ove ha un minimo), poi diventa crescente sino ad $x = 0$ (ove ha un massimo), successivamente ricomincia a decrescere sino ad $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (altro minimo) per poi tornare ad essere definitivamente crescente .
Concludiamo la nostra analisi studiando il segno di $a''(x) = 12x^2 - 2$:
$$12x^2 - 2 \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt{6}} \wedge x \geq \frac{1}{\sqrt{6}}$$
quindi i punti $x = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}$ sono i flessi della funzione : prima di $x = -\frac{1}{\sqrt{6}}$ e dopo $x = \frac{1}{\sqrt{6}}$ la funzione é convessa, mentre tra i due valori é concava.
Mettendo insieme tutte le informazioni ottenuti otteniamo il grafico visibile in Figura 1. ;

(b) $b(x) = \ln(1 + 2\sin^2(x))$: Essendo $0 \leq \sin^2(x) \leq 1$ abbiamo che
$$1 \leq 1 + 2\sin^2(x) \leq 3 \Longrightarrow 0 \leq \ln(1 + 2\sin^2(x)) \leq \ln(3) \ .$$
Da questa constatazione possiamo dedurre molte cose interessanti :

- Inanzitutto $D \equiv \mathbb{R}$ perché l'argomento del logaritmo é sempre positivo ;
- In secondo luogo $b(x) \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$;
- Infine la funzione non ha asintoti : difatti essendo $D \equiv \mathbb{R}$ non ha asintoti verticali e contenendo un seno (che sappiamo essere periodico di periodo 2π) continuerá ad oscillare tra i valori 0 ed $\ln(3)$ con periodicitá π .

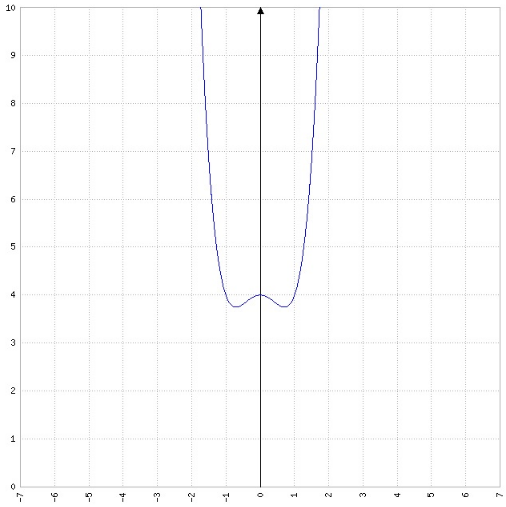

Figura 1: Grafico della funzione $a(x) = x^4 - x^2 + 4$.

Sapendo che il massimo valore assunto dalla funzione é $\ln(3)$ ed il suo valore minimo é 0, possiamo dedurre i punti di massimo/minimo anche senza studiare la derivata : difatti

$$b(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2\sin^2(x) = 1 \Longleftrightarrow \sin^2(x) = 0 \Longleftrightarrow x = k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$$

e

$$b(x) = \ln(3) \Longleftrightarrow 1 + 2\sin^2(x) = 3 \Longleftrightarrow \sin^2(x) = 1 \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Detto questo andiamo a studiare il segno di $b''(x)$:

$$b'(x) = \frac{2\sin(2x)}{1 + 2\sin^2(x)} \Longrightarrow b''(x) = \frac{4(1 - 4\sin^2(x))}{(1 + 2\sin^2(x))^2} \geq 0 \Longleftrightarrow 1 - 4\sin^2(x) \geq 0$$

$$\Longleftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow -\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z} \ .$$

Con quest'ultima informazione otteniamo il grafico di $b(x)$ (mostrato in Figura 2.) ;

(c) $c(x) = \sqrt[3]{(|x| - 1)(|x| - 2)^2}$: Per studiare questa funzione ci conviene spezzarla come segue

$$c(x) = \begin{cases} c_+(x) = \sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} & \text{se} \ \ x > 0 \\ -\sqrt[3]{4} & \text{se} \ \ x = 0 \\ c_-(x) = -\sqrt[3]{(x+1)(x+2)^2} & \text{se} \ \ x < 0 \end{cases}$$

$c(x)$ risulta essere continua ovunque, indi $D \equiv \mathbb{R}$. Notiamo, inoltre, che essendo una funzione pari basterá studiarla solo per $x > 0$ e poi ribaltare a specchio rispetto all'asse delle ordinate il grafico ottenuto. L'unica piccola accortezza da notare é che in $x = 0$ la funzione non risulterá essere derivabile per lo stesso motivo per cui non lo é la funzione $|x|$, pertanto, in tal punto, la funzione avrá un **punto angoloso** (un punto in cui le derivate destra e sinistra esistono finite,

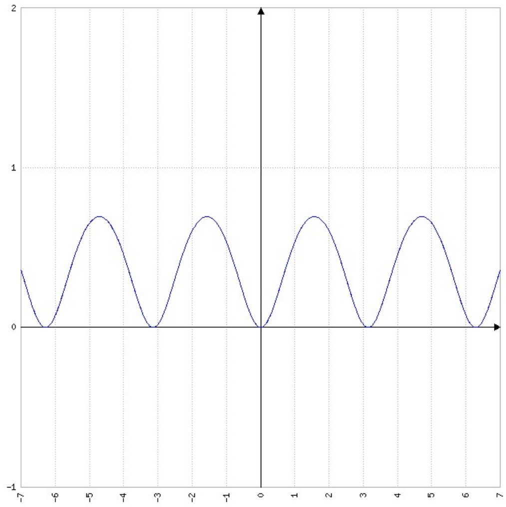

Figura 2: Grafico della funzione $b(x) = \ln(1 + \sin^2(x))$.

ma sono differenti). Partendo da questo presupposto partiamo con la solita analisi :

$$\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2} \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1$$

ci fornisce il segno di $c_+(x)$. Essendo continua non avrá asintoti verticali. Andiamo a vedere se ha un asintoto orizzontale :

$$\lim_{x\to+\infty} c_+(x) = +\infty$$

ci dice che non vi é. Proviamo, allora, a vedere se vi é un asintoto obliquo :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{(x-1)(x-2)^2}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{1 - \frac{5}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{4}{x^3}} = 1 = m$$

$$\Longrightarrow q = \lim_{x\to+\infty} c_+(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-5x^2 + 8x - 4}{c_+^2(x) + c_+(x)x + x^2} = -\frac{5}{3}$$

essendo $c_+(x) \approx x$. Dunque la funzione ha un asintoto obliquo $y = x - \frac{5}{3}$.
Passiamo allo studio del segno della derivata :

$$c'_+(x) = \frac{3x-4}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x-2)}} \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3x - 4 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \wedge x > 2 \ .$$

Dunque nel punto $x = \frac{4}{3}$ la funzione ha un massimo, mentre in $x = 2$ ha una **cuspide** (un punto in cui i limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono divergenti con segno opposto).
Per concludere studiamo il segno di $c''_+(x)$:

$$c''_+(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5(x-2)^4}} > 0 \Longleftrightarrow 0 < x < 1 \ .$$

Mettendo tutte le informazioni ottenute assieme otteniamo il grafico in Figura 3. (in questo caso non vi é un riferimento numerico sugli assi, perché Mathematica e altri programmi non riescono a disegnare le funzioni contenenti radici cubiche)

NB. Un punto come il punto $x = 1$ di questo esercizio si dice **flesso a tangente verticale** (cioé un punto in cui la derivata prima “esplode“, ma differenza di una cuspide il limite destro e sinistro del rapporto incrementale nel punto coincidono)

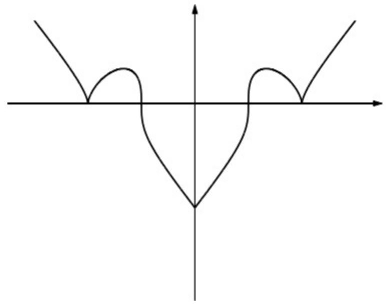

Figura 3: Grafico della funzione $c(x) = \sqrt[3]{(|x|-1)(|x|-2)^2}$.

(d) $d(x) = x + 2\cos(x)$: Questa funzione, come le precedenti, non ha discontinuitá, pertanto $D \equiv \mathbb{R}$. Notiamo inoltre che, essendo $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, si ha

$$x - 2 \leq x + 2\cos(x) \leq x + 2$$

cioé il grafico della nostra funzione sará compreso tra le due rette $y_1 = x - 2$ e $y_2 = x + 2$. Il segno della funzione non é esplicitabile semplicemente, per cui cercheremo di ricavarlo alla bene e meglio attraverso i passi successivi della scaletta. Non essendoci punti di discontinuitá, al solito, non vi saranno asintoti verticali. Vediamo se vi sono asintoti orizzontali :

$$\lim_{x\to\pm\infty} x + 2\cos(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(1 + 2\frac{\cos(x)}{x}\right) = \pm\infty$$

quindi la risposta é negativa. Passiamo alla ricerca di eventuali asintoti obliqui :

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + 2\cos(x)}{x} = 1$$

ma

$$\lim_{x\to\pm\infty} x + 2\cos(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} 2\cos(x) = \nexists$$

pertanto non vi sono nemmeno asintoti obliqui.
Essendo $d'(x) = 1 - 2\sin(x)$ abbiamo che

$$d'(x) \geq 0 \iff \sin(x) \leq \frac{1}{2} \iff -\frac{7}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

che ci dice che i punti del tipo $x_m = -\frac{7}{6}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sono di minimo ed i punti $x_M = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sono di massimo per $d(x)$.
Essendo $d''(x) = -2\cos(x)$ abbiamo che

$$d''(x) \geq 0 \iff \cos(x) \leq 0 \iff \frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq x \leq \frac{3}{2}\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

che ci dice che la funzione é convessa negli intervalli $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}$ e concava nei rimanenti. I punti $x_F = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sono tutti punti di flesso. Il grafico di $d(x)$ sará dunque quello in Figura 4. ;

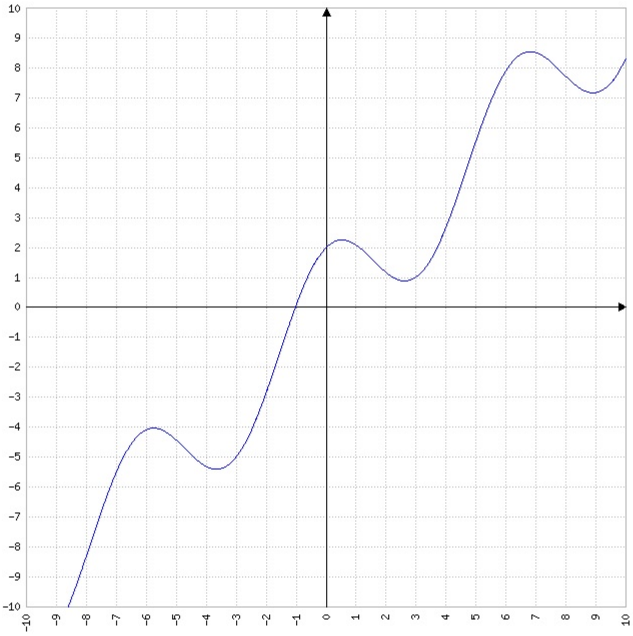

Figura 4: Grafico della funzione $d(x) = x + 2\cos(x)$.

(e) $e(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$: In questo caso il dominio non é tutto $\mathbb{R}$. Difatti, l'argomento del logaritmo deve essere positivo ed il denominatore nonnullo : la condizione del denominatore é inglobata dal campo di esistenza del logaritmo per cui avremo che $D := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Studiamo il segno :

$$e(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 1$$

cioé la funzione sará negativa per $x \in (0, 1)$, nulla in $x = 1$ e positiva altrove. Vediamo di capire se la funzione ha asintoti :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2} = -\infty \Longrightarrow x = 0 \quad \text{é un asintoto verticale} \quad ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0 \Longrightarrow y = 0 \quad \text{é un asintoto orizzontale} \quad .$$

Essendoci un asintoto orizzontale non potrá esserci un asintoto obliquo. Andiamo a studiare la derivata :

$$e'(x) = \frac{1 - 2\ln(x)}{x^3} \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\ln(x) \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \ln(x) \leq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow x \leq \sqrt{e}$$

quindi la funzione ha un massimo quando $x = \sqrt{e}$. Ci manca solo da studiare la derivata seconda :

$$e''(x) = \frac{6\ln(x) - 5}{x^4} \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(x) \geq \frac{5}{6} \Longleftrightarrow x \geq \sqrt[6]{e^5}$$

quindi la funzione ha un flesso quando $x = \sqrt[6]{e^5}$: prima di esso la funzione é concava, poi diventa convessa (ci dispiace per l'effetto zig-zag nel grafico in Figura 5. per cui questa cosa non é del tutto evidente) ;

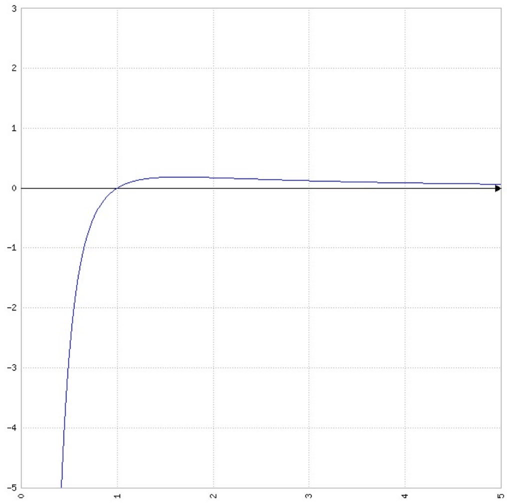

Figura 5: Grafico della funzione $e(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$.

(f) $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$: Cerchiamo di fare una breve analisi di questa funzione per riuscire a disegnarla senza bisogna della solita scaletta.
Sia $x > 0$: Se pensiamo all'intervallo $[n, n+1)$ abbiamo che la funzione $\lfloor x \rfloor$ su tale intervallo é costantemente pari ad n. Dunque su ogni intervallo $[n, n+1)$ abbiamo che $f(x)$ é pari alla retta $x + n$;
Sia $x < 0$: Qui il discorso é analogo, solo che abbiamo $f(x) = x - n$ su ogni intervallo del tipo $[-n, -n+1)$.
In altre parole

$$f(x) = \begin{cases} \quad \vdots & \\ x+2 & \text{se} \quad x \in [2,3) \\ x+1 & \text{se} \quad x \in [1,2) \\ x & \text{se} \quad x \in [0,1) \\ x-1 & \text{se} \quad x \in [-1,0) \\ x-2 & \text{se} \quad x \in [-2,-1) \\ \quad \vdots & \end{cases}$$

Pertanto il grafico di tale funzione sará quello visibile in Figura 6. ;

(g) $g(x) = x^x, \quad x > 0$: Per semplicitá é possibile riscrivere $g(x) = e^{x \ln(x)}$ cosí da rendere visivamente piú semplici i conti che dovremo fare. Notiamo subito che la restrizione $x > 0$ é coincidente col dominio della funzione. In secondo luogo la funzione é un esponenziale, ergo sempre positiva. Vediamo cosa succede per x vicino a 0 e per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to 0^+} e^{x \ln(x)} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x \ln(x)} = +\infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x \ln(x)}}{x}$$

quindi la funzione non ha alcun tipo di asintoto.
Abbiamo che

$$g'(x) = g(x)(\ln(x) + 1) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{e}$$

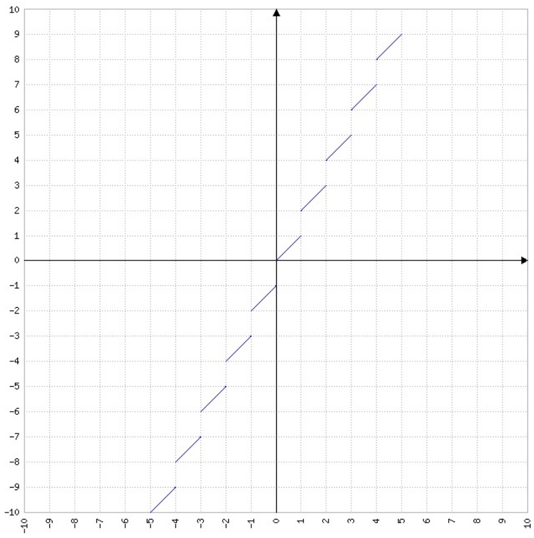

Figura 6: Grafico della funzione $f(x) = x + \lfloor x \rfloor$.

ergo, quando $x = \frac{1}{e}$ la funzione ha un punto di minimo.
Inoltre

$$g''(x) = g'(x)(\ln(x) + 1) + \frac{g(x)}{x} = g(x)\left((\ln(x) + 1)^2 + \frac{1}{x}\right) > 0 \ \forall \ x > 0$$

quindi la funzione é sempre convessa. Mettendo assieme tutte le informazioni ottenute é possibile ottenere il grafico in Figura 7. ;

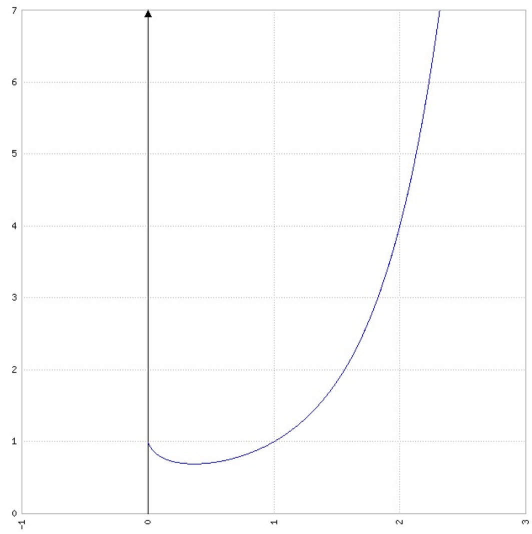

Figura 7: Grafico della funzione $g(x) = x^x$.

(h) $h(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\sin(x)\right)$: Essendo $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ abbiamo che

$$-1 = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\sin(x)\right) \leq \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

cioé $-1 \leq h(x) \leq 1 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$. $D \equiv \mathbb{R}$ perché le possibili discontinuitá (ricordiamo che la tangente “esplode“ se $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$) non sono contemplate per $h(x)$, difatti

$$\frac{\pi}{4}\sin(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow \sin(x) = 2+4k \text{ e } 2+4k < -1 \; \forall \; k \leq -1 \wedge 2+4k > 1 \; \forall \; k > 0 \, .$$

Essendo $h(x) \in [-1, 1]$ per vedere il segno basta pensare a quando la funzione $\frac{\pi}{4}\sin(x)$ é positiva, cioé per $x \in (0, \pi)$. Tutti i punti del tipo $x = k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$, difatti, sono zeri di $h(x)$, indi il passaggio di segno avviene in loro.
Per quanto detto sinora la funzione non ammette asintoti.
I punti di massimo/minimo sono facilmente rintracciabili ad occhio : essendo $h(x)$ al piú 1 ed al minimo -1 basta vedere quando l'argomento raggiunge il valore $\frac{\pi}{4}$ e quando $-\frac{\pi}{4}$, cioé quando $\sin(x) = 1$ e quando $\sin(x) = -1$. Ovviamente la risposta é che tutti i valori del tipo $x_m = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$ rendono la funzione minima, mentre tutti i valori del tipo $x_M = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \; k \in \mathbb{Z}$ la rendono massima.
Vediamo il segno di $h''(x)$ per concludere :

$$h'(x) = \frac{\pi\cos(x)}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\sin(x)\right)} \Longrightarrow h''(x) = \frac{\pi}{8\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\sin(x)\right)}\Big(\pi\cos^2(x)h(x) - 2\sin(x)\Big)$$

Notiamo che $h''(k\pi) = 0 \; \forall \; k \in \mathbb{Z}$ per scoprire che essi son tutti punti di flesso. Ergo i punti in cui la funzione cambia segno sono anche i punti in cui passa dall'essere concava all'essere convessa. Ma quali sono gli intervalli in cui é concava e quelli in cui é convessa? Per la natura dei punti di massimo/minimo pare evidente che gli intervalli del tipo $(2k\pi, (2k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$ sono quelli in cui la funzione é concava, mentre i rimanenti son quelli in cui é convessa.
Come al solito possiamo mettere insieme le informazioni per ottenere il grafico in Figura 8. ;

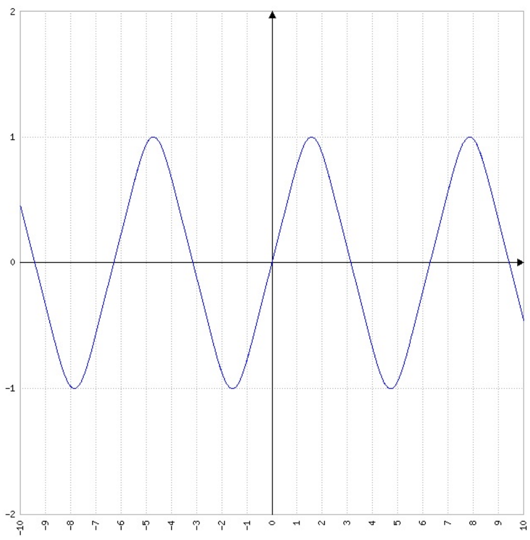

Figura 8: Grafico della funzione $h(x) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\sin(x)\right)$.

(i) $i(x) = \frac{x^2-1}{x}$: In tal caso dal dominio dobbiamo togliere il punto $x = 0$ ove il denominatore si annulla, ergo $D \equiv \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Studiamo il segno di $i(x)$:

$$\frac{x^2-1}{x} \geq 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \;\wedge\; x \geq 1 \\ x > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow x \in [-1, 0) \cup [1, +\infty) \, .$$

Vediamo se $x = 0$ é un asintoto verticale :

$$\lim_{x \to 0^{\mp}} \frac{x^2 - 1}{x} = \pm\infty \Longrightarrow x = 0 \text{ é un asintoto verticale .}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to \pm\infty} i(x) = \pm\infty \quad \text{, ma} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{i(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \pm\infty} i(x) - x = 0$$

ci dicono che la retta $y = x$ é un asintoto obliquo per $i(x)$.
Ora

$$i'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} > 0 \ \forall \ x \in D$$

ci dice che la funzione é strettamente crescente e

$$i''(x) = -\frac{2}{x^3} > 0 \Longleftrightarrow x < 0$$

ci dice che la funzione é convessa prima di $x = 0$ e concava dopo tale punto.Pertanto il grafico della funzione é quello visibile in Figura 9. ;

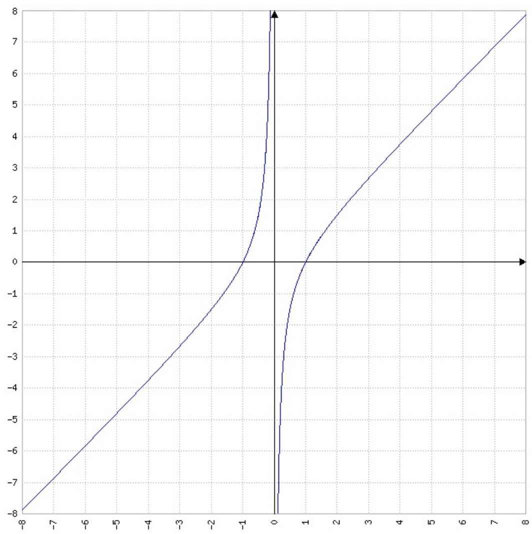

Figura 9: Grafico della funzione $i(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

(j) $j(x) = \frac{x^2}{\ln|x|-1}$: La funzione é pari, ergo il grafico sará a specchio rispetto all'asse delle ordinate. Dal dominio dovremo escludere il punto $x = 0$ ove il logaritmo non é definito ed, inoltre, dobbiamo anche fare in modo che il denominatore non si annulli, ergo imporre

$$\ln|x| - 1 \neq 0 \Longleftrightarrow \ln|x| \neq 1 \Longleftrightarrow x \neq \pm e \ .$$

Dunque abbiamo che $D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0, \pm e\}$. Passiamo all'analisi del segno della funzione (per comoditá consideriamo solo $x > 0$) :

$$j(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln(x) - 1 > 0 \Longleftrightarrow x > e \ .$$

Ora

$$\lim_{x \to 0^{\pm}} \frac{x^2}{\ln|x| - 1} = 0$$

ci dice che $x = 0$ é un **punto di discontinuitá eliminabile** (un punto in cui la funzione non é definita ma per cui limite destro e sinistro nel punto sono finiti e coincidenti) . Invece

$$\lim_{x \to e^{\mp}} \frac{x^2}{\ln(x) - 1} = \lim_{x \to -e^{\pm}} \frac{x^2}{\ln(-x) - 1} = \mp\infty$$

per cui abbiamo che $x = \pm e$ sono asintoti verticali di $j(x)$. Inoltre

$$\lim_{x \to \infty} j(x) = +\infty = \lim_{x \to +\infty} \frac{j(x)}{x}$$

ci dice che la nostra funzione non ha asintoti orizzontali/obliqui .
Andiamo a studiare il segno della derivata (supponiamo ancora $x > 0$) :

$$j'(x) = \frac{x(2\ln(x) - 3)}{(\ln(x) - 1)^2} \geq 0 \iff 2\ln(x) - 3 \geq 0 \iff \ln(x) \geq \frac{3}{2} \iff x \geq e\sqrt{e}$$

ergo quando $x = e\sqrt{e}$ la funzione ha un minimo. Inoltre

$$j''(x) = \frac{2\ln^2(x) - 7\ln(x) + 7}{(\ln(x) - 1)^3} \geq 0 \iff \begin{cases} 2\ln^2(x) - 7\ln(x) + 7 \geq 0 \\ \ln(x) - 1 > 0 \end{cases}$$

$$\iff \ln(x) - 1 > 0 \iff x > e$$

quindi la funzione sará concava in $(-e, e)$ e convessa altrove.
Essendo $j(\pm e\sqrt{e}) = 2e^3 \approx 40,17$ non ci é possibile mostrare un grafico buono dell'andamento della funzione, quindi mostreremo due grafici, uno con la parte negativa della funzione e l'altro con quella positiva (ad altezza $j(x) \geq 40$) ;

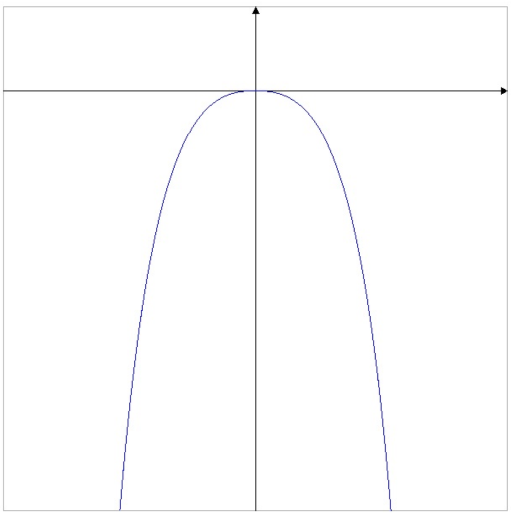

Figura 10: Grafico della funzione $j(x) = \frac{x^2}{\ln|x|-1}$, sotto l'asse delle ascisse .

(k) $k(x) = \ln(x) - \arctan(x - 1)$: Una condizione da imporre per il domionio é quella sulla positivitá dell'argomento del logaritmo, quindi $D = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}$.
Studiare il segno non é semplice, ergo cerchiamo di ricavare informazioni su di

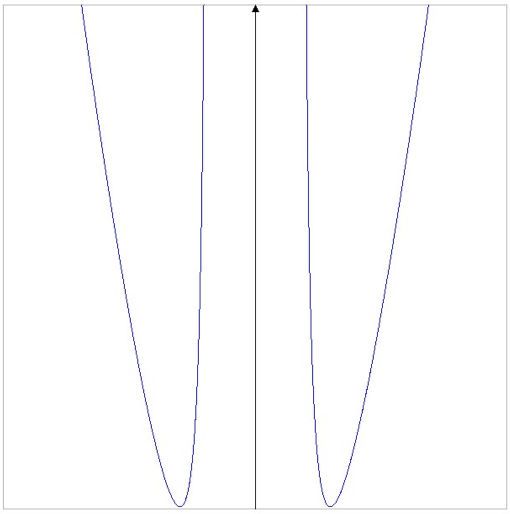

Figura 11: Grafico della funzione $j(x) = \frac{x^2}{\ln|x|-1}$, con $j(x) \geq 40$.

esso dai punti successivi della scaletta. Inanzitutto abbiamo che $x = 0$ é un asintoto verticale, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) - \arctan(x-1) = -\infty \ .$$

Ora

$$\lim_{x\to +\infty} \ln(x) - \arctan(x-1) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x) - \arctan(x-1)}{x} = 0$$

ci dicono che non vi sono asintoti orizzontali/obliqui .
Andiamo a derivare :

$$k'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1+(x-1)^2} = \frac{(x-1)(x-2)}{x(x^2-2x+2)} \geq 0 \iff (x-1)(x-2) \geq 0 \iff x \leq 1 \wedge x \geq 2$$

dunque quando $x = 1$ la funzione ha un massimo e quando $x = 2$ la funzione ha un minimo . Notiamo che fino al punto di massimo la funzione é crescente e $k(1) = 0$, quindi fino a tale punto la funzione é sicuramente negativa. Inoltre poi decresce fino al punto di minimo, indi possiamo dire con sicurezza che $k(x) \leq 0 \ \forall \ x \in (0, 2]$. Dopo tale punto la funzione é crescente e va a $+\infty$ per $x \to +\infty$, ergo possiamo dire che $\exists \ \alpha \in (2, +\infty) : k(\alpha) = 0$ e dopo tale α la funzione diventerá positiva.
Deriavando ancora otteniamo che

$$k''(x) = -\frac{(x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 8x + 4)}{x^2(x^2-2x+2)^2} \geq 0 \iff x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 8x + 4 \leq 0 \ .$$

Scomponendo il polinomio nel prodotto di due polinomi monici di secondo grado secondo il metodo canonico otteniamo che

$$x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 8x + 4 = (x^2 - (3+\sqrt{5})x + 3 + \sqrt{5})(x^2 - (3-\sqrt{5})x + 3 - \sqrt{5}) \leq 0$$

$$\iff x^2 - (3+\sqrt{5})x + 3 + \sqrt{5} \leq 0 \iff \frac{3+\sqrt{5} - \sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5} + \sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} \ .$$

Dunque quando $x = \frac{3+\sqrt{5}\pm\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2}$ la funzione ha un punto di flesso. Tra questi due valori risulta essere convessa, altrove concava.
Solo per semplicitá diciamo che

$$\frac{3+\sqrt{5}-\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} \approx 1,346 \quad \text{e} \quad \frac{3+\sqrt{5}+\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2} \approx 3,89 \ .$$

Unendo tutte le informazioni otteniamo il grafico visibile in Figura 12. ;

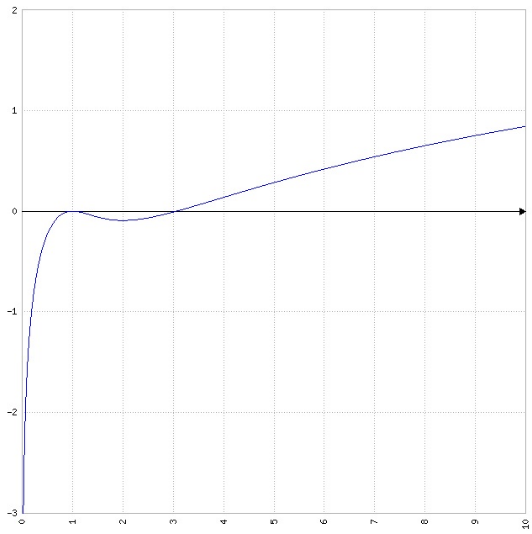

Figura 12: Grafico della funzione $k(x) = \ln(x) - \arctan(x-1)$.

(l) $l(x) = e^x \sin(5x)$: Non essendoci punti di discontinuitá abbiamo che $D \equiv \mathbb{R}$.
Vediamo il segno :

$$l(x) \geq 0 \iff \sin(5x) \geq 0 \iff 2k\pi \leq 5x \leq \pi + 2k\pi \iff \frac{2k\pi}{5} \leq x \leq \frac{(2k+1)\pi}{5} \ .$$

Non essendoci punti di discontinuitá la funzione non ha asintoti verticali. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} l(x) = \nexists$$

ma

$$\lim_{x\to-\infty} l(x) = 0$$

quindi $y = 0$ é un asintoto orizzontale. Pertanto non vi sono asintoti obliqui.
Andiamo a derivare : $l'(x) = e^x(\sin(5x) + 5\cos(5x))$; ci rendiamo subito conto che non é semplice stabilire il segno di questa derivata, quindi, sapendo che la funzione oscilla partendo da $y = 0$ in poi, ad intuito, possiamo dire che il contributo dell'esponenziale fará sí che le oscillazioni andranno ad aumentare/-diminuire d'altezza al crescere di x diminuendo la lunghezza x dell'oscillazione. Per chi fosse, tuttavia, interessato ai valori numerici, grazie ai calcolatori é possibile stabilire che i massimi locali della funzione sono nei punti ove
$x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{2}{5}\arctan\left(\frac{1+\sqrt{26}}{5}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ ed i minimi locali sono nei punti ove $x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{2}{5}\arctan\left(\frac{1-\sqrt{26}}{5}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.
Derivando ancora otteniamo che $l''(x) = 2e^x(5\cos(5x) - 12\sin(5x))$ che, nuovamente non ci dice molto di interessante. Sempre per i patiti dei risultati numerici

possiamo dire che i flessi vi sono nei punti del tipo $x = \frac{2k\pi}{5} \pm \frac{2}{5}\arctan(5^{\mp 1})$, $k \in \mathbb{Z}$. Ovviamente, come tutte le funzioni oscillanti, avremo che la funzione diverrá convessa vicino ai punti di minimo tornando ad essere concava in prossimitá dei punti di massimo.
La poca facilitá di studio della funzione ci permette di tracciare un grafico molto approssimativo. Tuttavia é possibile vedere il grafico della funzione in Figura 13.

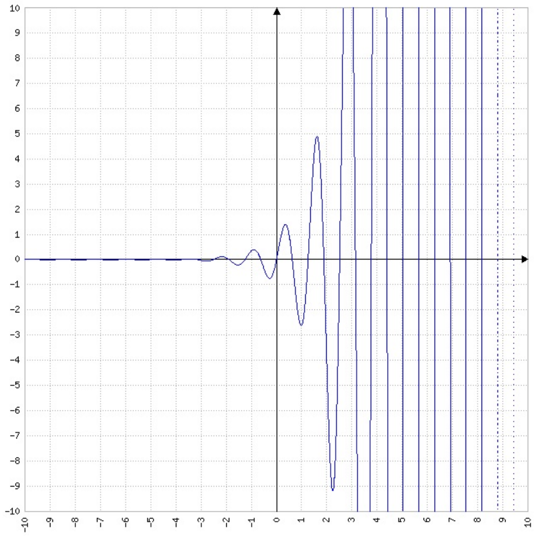

Figura 13: Grafico della funzione $l(x) = e^x \sin(5x)$.

2. (a) L'unico dato noto é il volume V del prisma. Ricordiamo che

$$V = A_{\text{base}} * \ h \ .$$

Essendo il lato del triangolo ció che ci interessa trovare, esso sará la nostra incognita x. Denominiamo con h_Δ l'altezza del triangolo. Per il Teorema di Pitagora abbiamo che

$$h_\Delta = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \Longrightarrow A_{\text{base}} = \frac{b_\Delta * h_\Delta}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

ove b_Δ in tal caso sarebbe la lunghezza del lato del triangolo (essendo esso equilatero). Sostituendo nella formula del volume otteniamo che $V = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2h$. Essendo V un dato noto del problema, abbiamo che $h = h(x)$ varierá in funzione di x, cioé

$$h(x) = \frac{4V}{\sqrt{3}x^2} \ .$$

A noi interessa calcolare la superficie totale in funzione di x, dunque

$$S_{\text{TOT}} = S_{\text{TOT}}(x) = 2A_{\text{base}} + 3S_{\text{LAT}} = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + 3xh(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x^2 + \frac{4\sqrt{3}V}{x}$$

ove S_{TOT} rappresenta la superficie laterale, cioé l'area del rettangolo di lati x ed h. Essendo un problema di minimo, ci interessa vedere ove si annulla la derivata della funzione che abbiamo costruito :

$$S'_{\text{TOT}}(x) = \sqrt{3}x - \frac{4\sqrt{3}V}{x^2} = 0 \Longleftrightarrow \sqrt{3}x^3 = 4\sqrt{3}V \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{4V} \ .$$

Poiché $S'_{\text{TOT}}(x) \geq 0$ per $x \geq \sqrt[3]{4V}$ si ha che il valore trovato é, effettivamente, quello che rende $S_{\text{TOT}}(x)$ minima ;

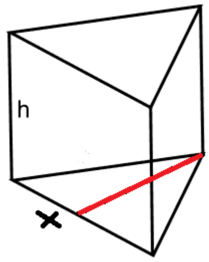

Figura 14: Prisma dell'esercizio 2. (a). In rosso é rappresentata h_Δ, mentre $h = h(x)$.

(b) Per comoditá chiamiamo il perimetro $2p$ e la base b. Con tali notazioni chiamiamo x uno qualsiasi dei due lati non noti. Di conseguenza il rimanente sará lungo $2p - x - b$.
Ricordiamo la formula di Erone per il calcolo dell'area di un triangolo ove siano noti il perimetro $2p$ ed i lati a, b, c :

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \; .$$

Applicandola al nostro problema otteniamo

$$A = A(x) = \sqrt{p(p-x)(p-b)(x+b-p)} = K\sqrt{-x^2 + x(2p-b) + p(b-p)},$$

con $K = \sqrt{p(p-b)}$. Derivando otteniamo che

$$A'(x) = K^2 \frac{(-2x + 2p - b)}{2A(x)} = 0 \iff -2x + 2p - b = 0 \iff x = \frac{2p-b}{2} \; .$$

Essendo $A'(x) \geq 0$ se $x \leq \frac{2p-b}{2}$ si ha che tale x rende $A(x)$ massima.
Vediamo dunque se tale triangolo é isoscele :

$$2p - x - b = 2p - \left(\frac{2p-b}{2}\right) - b = 2p - p + \frac{b}{2} - b = p - \frac{b}{2} = \frac{2p-b}{2} = x \; ,$$

come volevasi dimostrare ;

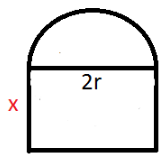

Figura 15: Figura F dell'esercizio 2. (c) (il lato su cui é scritto $2r \notin F$) .

(c) Conosciamo il perimetro della figura F di sopra e vogliamo calcolare la sua area. Sia S il semicerchio, r il suo raggio e denotiamo con p_S ed A_S la sua area ed il suo perimetro.

Allora abbiamo che

- $p_S = \pi r$
- $A_S = \frac{\pi r^2}{2}$

Detto questo, denotiamo con x il lato minore del rettangolo. Abbiamo che

$$p_F = \pi r + 2x + 2r \ .$$

Essendo il perimetro dato, mentre il raggio no, sará quest'ultimo variare in funzione di x, quindi

$$r = r(x) = \frac{p_F - 2x}{\pi + 2} \ .$$

Ora, denotando con R il rettangolo, abbiamo che

$$A_F = A_F(x) = A_S + A_R = \frac{\pi r^2(x)}{2} + 2xr(x) = \left(\frac{\pi}{2} r(x) + 2x\right) r(x) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{p_F - 2x}{\pi + 2}\right) + 2x\right)\left(\frac{p_F - 2x}{\pi + 2}\right) = \cdots\cdots = \frac{-x^2(16 + 4\pi) + 8p_F x + \pi p_F^2}{2(\pi + 2)^2} \ .$$

Derivando otteniamo

$$A_F'(x) = \frac{-x(16 + 4\pi) + 4p_F}{(\pi + 2)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{p_F}{\pi + 4} \ .$$

Come al solito studiando il segno della derivata si puó scoprire che per tale valore l'area é davvero massima.
Calcoliamola per concludere

$$A_F\left(\frac{p_F}{\pi + 4}\right) = \frac{-4\left(\frac{p_F}{\pi+4}\right)^2 (\pi + 4) + 8p_F\left(\frac{p_F}{\pi+4}\right) + \pi p_F^2}{2(\pi + 2)^2} = \frac{p_F^2}{2(\pi + 4)} \ ;$$

(d) L'equazione dell'ellise, E, é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Il punto P_1 in Figura 16 avrá una certa ascissa x e poiché $P_1 \in E$ dovrá

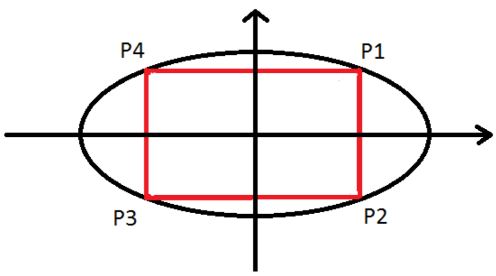

Figura 16: Ellisse e rettangolo dell'esercizio 2. (d) .

soddisfare l'equazione di sopra, quindi la sua ordinata sará

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \ .$$

Analogamente avremo che

$$P_2 = \left(x, -\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) \quad \text{e} \quad P_{3,4} = \left(-x, \mp\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) .$$

Pertanto

$$\overline{P_1P_2} = 2\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \quad \text{e} \quad \overline{P_1P_4} = 2x$$

quindi

$$A = A(x) = 4\ \frac{b}{a}\ x\sqrt{a^2-x^2}\ .$$

Derivando otteniamo che

$$A'(x) = 4\ \frac{b}{a}\ \left(\sqrt{a^2-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right) = 4\ \frac{b}{a}\ \frac{(a^2-2x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}} = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}\ .$$

Essendo $A'(x) \geq 0$ per $x \leq \frac{a}{\sqrt{2}}$, si ha che per tale valore di x l'area é massima come richiesto .

3. Ricordiamo che $f(x)$ si dice un **o-piccolo** di $g(x)$, in notazione $f(x) = o(g(x))$, se

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\ .$$

Seguendo gli esercizi in ordine cronologico saranno specificati tutti gli sviluppi di Taylor utilizzati.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3\arctan(x)+\sin^2(1-\cos(2x))}{27x^4+5\sin(x)}$: Ricordando che

- $\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\arctan(x)+\sin^2(1-\cos(2x))}{27x^4+5\sin(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)\right)+\sin^2(2x^2+o(x^3))}{27x^4+5\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{3x-x^3+o(x^3)}{5x-\frac{5}{6}x^3+o(x^3)} = \lim_{x\to 0}\frac{3x+o(x)}{5x+o(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{3+o(1)}{5+o(1)} = \frac{3}{5}\ ;$$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{12\left(\sqrt[3]{1+4x}+\sqrt[4]{1-3x}-2\right)-7x}{\cos(x)-1}$: Ricordando che

- $\sqrt[3]{1+4x} = 1 + \frac{4}{3}x - \frac{16}{9}x^2 + o(x^2)$
- $\sqrt[4]{1-3x} = 1 - \frac{3}{4}x - \frac{27}{32}x^2 + o(x^2)$

abbiamo che

$$\lim_{x\to 0}\frac{12\left(\sqrt[3]{1+4x}+\sqrt[4]{1-3x}-2\right)-7x}{\cos(x)-1} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{12\left(1+\frac{4}{3}x-\frac{16}{9}x^2+1-\frac{3}{4}x-\frac{27}{32}x^2-2\right)-7x+o(x^2)}{1-\frac{x^2}{2}-1+o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{16x-\frac{64}{3}x^2-9x-\frac{81}{8}x^2-7x+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{64}{3}+\frac{81}{8}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} = \frac{755}{12}\ ;$$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{3x\cos(2x) + 6\ln(1+x^3)}{x^2}$: Essendo $\ln(1+x^3) = x^3 + o(x^3)$ abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x\cos(2x) + 6\ln(1+x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3x\left(1-2x^2\right) + 6x^3 + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{3}{x} + o(x) = +\infty \,;$$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{\left((1-x)^{-1} + e^x\right)^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x\ln(\cos(x))}$: Ricordando che

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$
- $\ln(1-x) = -x + o(x)$

abbiamo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left((1-x)^{-1} + e^x\right)^2 - 4e^{2x} - 2x^2}{x\ln(\cos(x))} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + x + x^2 + x^3 + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2 - 4\left(1 + 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3\right) - 2x^2 + o(x^3)}{x\left(\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(2 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)\right)^2 - 4 - 8x - 10x^2 - \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)}{x\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4 + 4x^2 + 8x + 6x^2 + \frac{14}{3}x^3 + 6x^3 - 4 - 8x - 10x^2 - \frac{16}{3}x^3 + o(x^3)}{-\frac{x^3}{2} + o(x^3)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6 - \frac{2}{3} + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} = -\frac{32}{3} \,.$$

4. Sappiamo che se sviluppiamo $f(x)$ in serie di Taylor attorno ad x_0 abbiamo che

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} = T_n(f,x) + R_n(x)$$

ove

$$T_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\frac{(x-x_0)^k}{k!} \quad \text{e} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},\ \xi \in (x_0, x)\ .$$

Ricordiamo che $f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$, cioé é la derivata n-esima di f rispetto ad x.
Per svolgere il seguente esercizio bisognerá stimare il resto $R_n(x)$ (in modulo) con 10^{-3}, cioé trovare l'n che renderá la stima $|R_n(x)| < 10^{-3}$ vera . Una volta trovato tale n, calcolando $T_n(f,x)$ otterremo proprio il valore di $f(x)$ con un errore inferiore a 10^{-3}.
Svolgendo gli esercizi la procedura risulterá piú chiara :

(a) $\sin(1)$: Sappiamo che

$$\sin(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} + R_n(x)$$

con
$$|R_n(x)| = \left|\frac{\cos(\xi)}{(2n+3)!}x^{2n+3}\right|,\ \xi \in (0,x)\ .$$
Ora, noi vogliamo $\sin(1)$, pertanto sostituendo il valore $x = 1$ otteniamo che
$$|R_n(1)| = \left|\frac{\cos(\xi)}{(2n+3)!}\right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}$$
ed imponendo il fatto che vogliamo un errore inferiore a 10^{-3} otteniamo che
$$|R_n(1)| \leq 10^{-3} \Longleftrightarrow \frac{1}{(2n+3)!} \leq \frac{1}{1000} \Longleftrightarrow (2n+3)! \geq 1000 \Longleftrightarrow n \geq 2\ .$$
Andiamo ora a calcolare $T_2(f,1)$ ed il gioco é fatto :
$$T_2(f,1) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0,8416\ .$$
Essendo $\sin(1) \approx 0,8414$ abbiamo che il risultato ottenuto rispetta la richiesta ;

(b) $\ln(2)$: Essendo
$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}x^{k+1} + \frac{(-1)^{n+1}\ x^{n+2}}{(n+2)(1+\xi)^{n+1}},\ \xi \in (0,x)$$
abbiamo che
$$\ln(2) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} + \frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)(1+\xi)^{n+1}},\ \xi \in (0,1)\ .$$
Ora
$$|R_n(1)| = \left|\frac{1}{(n+2)(1+\xi)^{n+1}}\right| \leq \frac{1}{n+2}$$
dunque $|R_n(1)| \leq 10^{-3}$ é vera se e soltanto se $n+2 \geq 1000$, cioé per $n \geq 998$. Essendo (non calcolato a mano) $T_{998}(f,1) \approx 0,6936$ ed $\ln(2) \approx 0,6931$ il risultato é soddisfacente ;

(c) $\sqrt{e}$: Essendo
$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\xi},\ \xi \in (0,x)$$
abbiamo che
$$\sqrt{e} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!!} + \frac{e^{\xi}}{(2n+2)!!},\ \xi \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$$
giacché $2^k\ k! = (2k)!!$ essendo ogni membro della prodotto moltiplicato per 2. Ora
$$\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| = \frac{e^{\xi}}{(2n+2)!!} < \frac{\sqrt{e}}{(2n+2)!!} < \frac{2}{(2n+2)!!}\ .$$
Dunque $\left|R_n\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq 10^{-3}$ é vera se e soltanto se
$$\frac{1}{(2n+2)!!} \leq \frac{1}{2000} \Longleftrightarrow (2n+2)!! \geq 2000 \Longleftrightarrow n \geq 4\ .$$

Essendo

$$T_4\left(f, \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{4} \frac{1}{(2k)!!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} = \frac{211}{128} \approx 1,6484 \ .$$

Il risultato ottenuto ci soddisfa in quanto $\sqrt{e} \approx 1,6487$.

5. Ricordiamo che se $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$ ed f é convessa allora

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ \ \forall\ x, x_0 \in (a,b)$$

per il **Teorema 2** a pagina 7 (III settimana) delle dispense del corso.
Detto questo, essendo $f'(x_0) = 0$ abbiamo che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall\ x, x_0 \in (a,b)$, ergo x_0 é un punto di minimo assoluto per $f(x)$ in $(a,b)$$\blacksquare$